Задачи с параметром (графический прием решения)

Введение

Применение графиков при исследовании задач с параметрами необычайно эффективно. В зависимости от способа их применения выделяют два основных подхода.

План решения задач с параметром графическим методом

в координатной плоскости (xOy)

1. Строим график функции $y=f(x;a)$, задающий семейство кривых, зависящих от параметра a.

2. Определяем преобразование, позволяющее перейти от одной кривой семейства к другой.

3. Читаем график и находим необходимый графический образ.

в координатной плоскости (xOa)

1. Записываем уравнение $F(x;a)=0$ в виде $a=f(x)$ и строим график этой функции.

2. Находим точки пересечения графика функции $a=f(x)$ с прямыми вида $a=a_0$, параллельными оси Ox.

3. Выбираем абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

§1. Вспомогательные задачи

Эти задачи часто возникнут при исследовании уравнений и неравенств с параметрами графическими методами.

Графические методы особенно эффективны при исследовании уравнений и неравенств, содержащих модули. Они позволяют отображать нужные для решения случаи, и не заниматься перебором всех случаев имеют место при формальном раскрытии модулей. Поэтому для решения задач надо уметь строить графики функций с модулями.

Задача 1.1. Построить график функции $y=|2x+8|+|2x-6|$

Решение.

Для построения графика функции раскроем знак модуля обоих выражений. Для этого приравняем к нулю оба выражения под знаками модуля:

1) $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$; 2) $2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$.

Нанесем точки $\boldsymbol{x=-4}$ и $\boldsymbol{x=3}$ на числовую прямую (рис.1.1). они разбили числовую прямую на три промежутка.

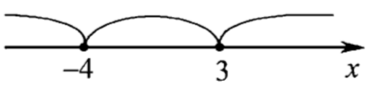


рис. 1.1

1) При $x\le -4$ имеем $2x+8\le 0$, $2x-6\le 0$. Поэтому $|2x+8|=-(2x+8)=-2x-8$, $|2x-6|=-(2x-6)=-2x+6$. Следовательно,

$$\boldsymbol{y}=|2x+8|+|2x-6|=(-2x-8)+(-2x+6)=-4x-2.$$

2) При $-4 \le x \le 3$ выражение $2x+8 \ge 0$, а выражение $2x-6 \le 0$. Поэтому $|2x+8| = 2x+8$, $|2x-6| = -(2x-6) = -2x+6$. Следовательно,

$$\boldsymbol{y} = |2x+8| + |2x-6| = (2x+8) + (-2x+6) = 14.$$

3) При $x \ge 3$ оба выражения $2x+8$ и $2x-6$ будут неотрицательны. Поэтому $|2x+8| = 2x+8$, $|2x-6| = 2x-6$. Следовательно,

$$\boldsymbol{y} = |2x+8| + |2x-6| = 2x+8+2x-6 = 4x+2$$

Итак, исходную функцию можно записать в виде

$$y = \begin{cases} -4x-2, \text{если } x \le -4 \\ 14, \quad \text{если } -4 \le x \le 3 \\ 4x+2, \text{если } x \ge 3 \end{cases}$$

Теперь легко построить график (рис.1.2)

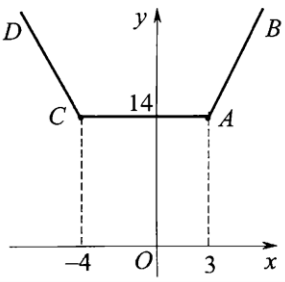


рис.1.2

Задача 1.2. Построить график функции $\boldsymbol{y} = |x^2 - 10x + 16|$

Решение.

Раскроем знак модуля, как и в предыдущей задаче. Найдем значения x, при которых значение модуля обращается в нуль, т.е. решим квадратное уравнение $x^2 - 10x + 16 = 0$. Решением уравнения являются числа 2 и 8. Эти числа делят координатную прямую на три промежутка.

$x^2 - 10x + 16 \ge 0$ при $x \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$. Тогда $|x^2 - 10x + 16| = x^2 - 10x + 16$.

$x^2 - 10x + 16 \le 0$ при $x \in [2; 8]$. Тогда $|x^2 - 10x + 16| = -x^2 + 10x - 16$.

Итак, нашу функцию можно записать в виде

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 16, \text{если } x \le 2, x \ge 8 \\ -x^2 + 10x - 16, \text{если } 2 \le x \le 8 \end{cases}$$

Искомый график изображен на рис.1.3

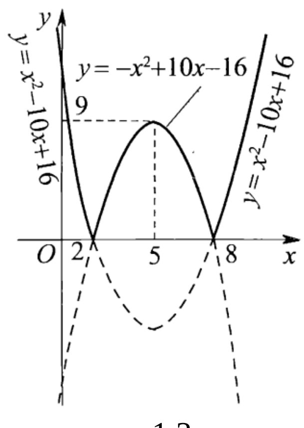


рис.1.3.

Тот же самый график можно построить проще. Сначала построить график $y = x^2 - 10x + 16$, а затем ту его часть, которая находится под осью Ox, симметрично отобразить относительно оси Ox

Задача 1.3. Построить график функции $y = \left||x-5|-1\right|+4$

Решение.

Можно построить график, последовательно раскрывая модули. А можно построить этот же график, выполнив последовательно преобразования.

График функции $y = |x|$ сдвинуть на 5 единиц вправо вдоль оси *Ox*. При этом получим график функции $y = |x-5|$ (рис.1.4)

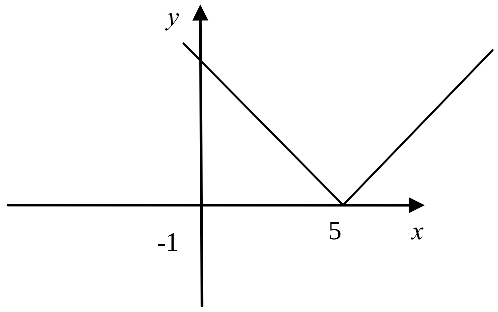


рис.1.4

Затем получившийся график сдвинуть на 1 вниз вдоль оси *Oy*. Получим график функции $y = |x-5|-1$(рис.1.5)

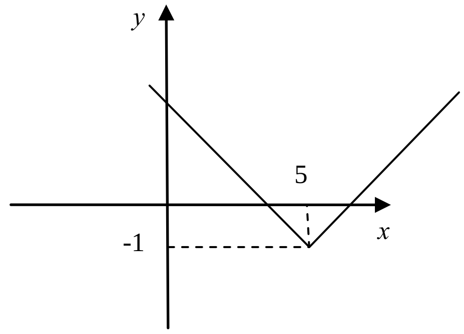


рис.1.5

Затем ту часть графика, которая находится ниже оси *Ox*, отобразить симметрично относительно оси *Ox*. Получим график функции $y = ||x-5|-1|$ (рис.1.6)

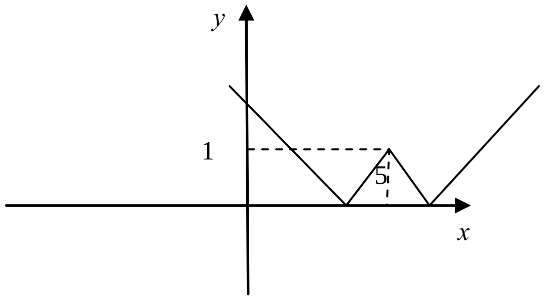


рис.1.6

И теперь, вновь получившийся график сдвинем на 4 единицы вверх вдоль оси *Oy*. Получим искомый график функции (рис.1.7)

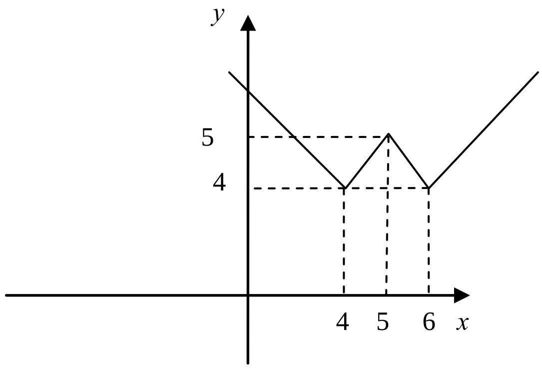


рис.1.7

Задача 1.4. Показать, что графиком функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ при $a \neq 0$ является полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$.
Решение.
Рассмотрим равенство $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ как уравнение с двумя переменными x и y и перепишем его в виде $\sqrt{a^2 - x^2} = y$
Если $y < 0$, то очевидно, что уравнение решений не имеет, т.к. $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$ при всех допустимых a и x.
При $y \geq 0$ уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ a^2 - x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

Как известно из курса геометрии, окружность с центром в начале координат радиуса R ($R>0$) имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Поэтому $x^2 + y^2 = a^2$ есть уравнение окружности с центром в $O(0;0)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2} = |a|$. И, наконец, среди точек этой окружности мы должны выбрать те, у которых $y \geq 0$. Это верхняя полуокружность (рис. 1.8). Она изображена более жирной линией.

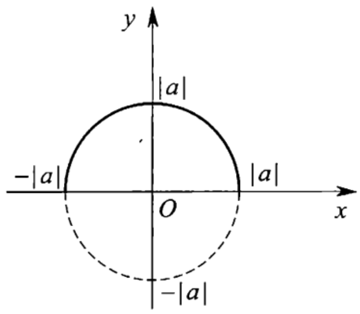


рис. 1.8

§2. Сечение семейством прямых $y = a$

Задача 2.1. В зависимости от параметра a определить число решений уравнения

$$|2x + 8| + |2x - 6| = a$$

Решение

Нарисуем графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = a$. График y_1 мы строили в задаче 1.1. График $y_2 = a$ при каждом значении a представляет собой прямую, параллельную оси Ox. При разных значениях a – разные прямые. Число решений уравнения совпадает с числом пересечений графиков y_1 и y_2.

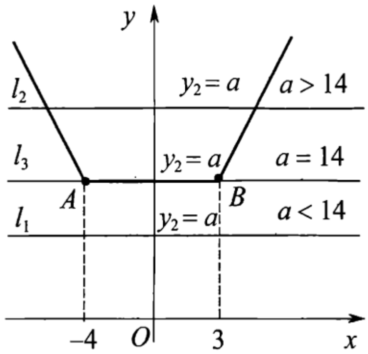


рис. 2.1.

Анализируя графики на рис. 2.1, получаем следующее

1) При $a < 14$ решений нет, так как графики y_1 и y_2 не пересекаются (прямая l_1).

2) При $a > 14$ графики y_1 и y_2 пересекаются в двух точках (прямая l_2). Следовательно, при этих *a* уравнение имеет два решения.

3) И, наконец, при $a = 14$ графики y_1 и y_2 не пересекаются по отрезку АВ (прямая l_3). Следовательно, при этих *a* уравнение имеет бесконечно много решений.

Ответ: при $a > 14$ два решения
при $a = 14$ решений бесконечно
при $a < 14$ решений нет

Задача 2.2. При всех *a* решить уравнение $|2x + 8| + |2x - 6| = a$

Решение.

Эта задача является продолжением предыдущей задачи. Теперь нам надо найти не только число решений уравнения, но и сами эти решения. Опять рисуем графики $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = a$.

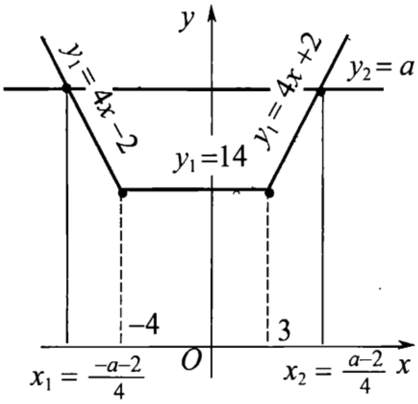


рис.2.2

Как мы видели в предыдущей задаче:

1) При $a > 14$ уравнение имеет два решения. При этом решениями будут абсциссы точек пересечения графиков y_1 и y_2. Найдем их. Левая ветвь графика y_1 задается уравнением $y_1 = -4x - 2$. Чтобы найти точку пересечения, приравняем $y_1 = y_2$. Имеем, $-4x - 2 = a$, откуда $4x = -a - 2$ и $x_1 = \frac{-a-2}{4}$ – первый корень нашего уравнения (рис. 2.2)

Правая ветвь графика задается уравнением $y_1 = 4x + 2$. Имеем $4x + 2 = a$, откуда находим $x_2 = \frac{a-2}{4}$ – второй корень уравнения (рис.2.2)

Итак, уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-a-2}{4}$ и $x_2 = \frac{a-2}{4}$

2) При $a = 14$ прямая $y_2 = a$ на промежутке $[-4; 3]$ совпадает с «дном» графика y_1. Все значения *x* из этого промежутка и будут множеством решений при $a = 14$

3) при $a < 14$ – решений нет

Ответ: при $a > 14$ два решения $x_1 = \frac{-a-2}{4}$, $x_2 = \frac{a-2}{4}$

при $a = 14$ решениями являются $x \in [-4; 3]$

при $a < 14$ решений нет

***

Еще раз посмотрим на решения последних двух задач. Суть их сводилась к следующему. Мы построили графики функций $y_1 = |2x+8| + |2x-6|$ и $y_2 = a$. График функции y_1 представляет собой ломаную, не зависящую от параметра. График $y_2 = a$ при каждом значении *a* есть прямая, параллельная оси *Ox*. И мы пересекали график y_1 с графиком y_2. Поскольку при разных значениях *a* прямые $y_2 = a$ будут разными, то можно сказать, что мы пересекаем график семейством прямых $y_2 = a$, параллельных оси *Ox* (отсюда и название – метод сечений). Число точек пересечения графиков y_1 и y_2 совпадает с числом корней уравнения. При различных *a* это могут быть разные числа. В задаче 1.1. мы видели, что прямые $y_2 = a$ при $a > 14$ пересекает график y_1 в двух точках, а при $a < 14$ вообще не пересекают график y_1. Находя теперь абсциссы точек пересечения этих графиков, мы находим сами корни уравнения, которые, естественно, зависят от параметра *a*.

Эта идея лежит в решении всех уравнений с параметрами $f(x) = g(x)$ методом сечений. Отличия же различных задач друг от друга состоят только в следующих моментах: 1) какая функция взята в качестве $y_1 = f(x)$ и 2) каким семейством кривых $y_2 = g(x)$ (или прямых) мы будем пересекать график функции y_1

В следующих примерах мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся семейства $y = a$, $y = x + a$, $y = ax$, $y = |x - a|$, $x^2 + y^2 = a^2$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и некоторые другие.

Те же самые соображения используются и при решении неравенств $f(x) < g(x)$. Только при решении неравенств мы ищем промежутки, на которых график функции $y_1 = f(x)$ находится ниже графика $y_2 = g(x)$

Пример 2.3. При всех *a* решить неравенство $|2x+8| + |2x-6| < a$

Решение.

Нам надо найти все *x*, при которых график $y_1 = |2x+8| + |2x-6|$ находится ниже графика $y_2 = a$. Воспользовавшись графиками на рис.3, мы видим, что при $a > 14$ решениями будут $x \epsilon \left(\frac{-a-2}{4}; \frac{a-2}{4}\right)$, а при $a \le 14$ решений нет

Ответ: при $a > 14$ решениями являются $x \epsilon \left(\frac{-a-2}{4}; \frac{a-2}{4}\right)$,

при $a \le 14$ решений нет.

Пример 2.4. Определить, при каких *a* уравнение $|x^2 - 10x + 16| = a^2 - 8a$ имеет более двух решений

Решение.

Нарисуем графики функций $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = a^2 - 8a$. Построение графика y_1 мы разбирали в задаче 1.2.

Заметим, что функция y_2 не зависит от *x*. Поэтому в системе координат *xOy* график функции y_2представляет собой семейство прямых параллельных оси *Ox*. Обозначим для удобства $\boldsymbol{c} = a^2 - 8a$. Тогда $y_2 =$ с. Оба графика представлены на рисунке 2.3

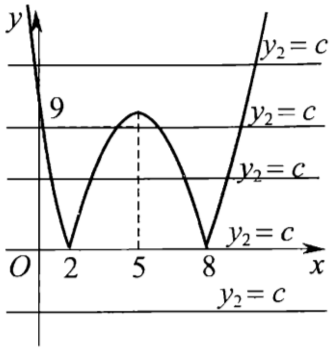


рис.2.3

Очевидно, что в зависимости от c уравнение может не иметь решений, иметь два, три или четыре решения. Три решения уравнение имеет, когда прямая $y_2 = \text{c}$ касается вершины параболы. Это имеет место при $c = 9$. Четыре решения будут при $0 < c < 9$. Объединив эти два случая, получаем $0 < c \leq 9$. Подставив $\boldsymbol{c} = a^2 - 8a$, получаем двойное неравенство $0 < a^2 - 8a \leq 9$. Решением его будут $a \in [-1; 0) \cup (8; 9]$

Ответ: при $a \in [-1; 0) \cup (8; 9]$ уравнение имеет более двух решений

§3. Сечение семейством прямых $\boldsymbol{y = x + a}$

Задача 3.1. При всех значениях параметра a определить число решений уравнения $\left||x-5|-1\right| + 4 = \frac{x}{2} + a$

Решение.

Нарисуем графики функций $y_1 = \left||x-5|-1\right| + 4$ и $y_2 = \frac{x}{2} + a$. График функции $y_2 = \frac{x}{2} + a$ при каждом a представляет собой прямую с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

1) Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит ниже точки A (рис. 3.1 прямая l_1) решений нет. Это имеет место, когда

$$y_2(6) < 4 \Leftrightarrow \frac{6}{2} + a < 4 \Leftrightarrow a < 1$$

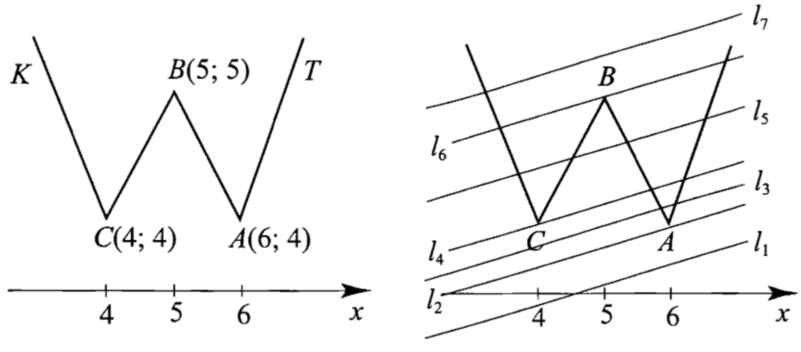


рис.3.1

2) Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку A (рис. 3.1 прямая l_2) уравнение имеет одно решение. Имеем

$$y_2(6) = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{2} + a = 4 \Leftrightarrow a = 1$$

3) Если прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит выше точки A, но ниже точки C (рис. 3.1 прямая l_3) уравнение имеет два решения. Последнее имеет место, когда $y_2(6) > 4$ **и** $y_2(4) < 4$. Имеем

$$\begin{cases} y_2(6) > 4 \\ y_2(4) < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{2} + a > 4 \\ \frac{4}{2} + a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon(1; 2)$$

4) Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку C (рис. 3.1 прямая l_4) уравнение имеет три решения. Это будет при выполнении равенства

$$y_2(4) = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{2} + a = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

5) Если прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит выше точки C, но ниже точки B (рис. 3.1 прямая l_5) исходное уравнение имеет четыре решения. Последнее имеет место, когда

$$\begin{cases} y_2(4) > 4 \\ y_2(5) < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{2} + a > 4 \\ \frac{5}{2} + a < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2 \\ a < 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow a\epsilon(2; 2{,}5)$$

6) Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку B (рис. 3.1 прямая l_6) уравнение имеет три решения. Последнее имеет место при

$$y_2(5) = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} + a = 5 \Leftrightarrow a = 2{,}5$$

7) Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит выше точки B (рис. 3.1 прямая l_7) уравнение снова имеет два решения. Это будет при выполнении неравенства

$$y_2(5) > 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} + a > 5 \Leftrightarrow a > 2{,}5$$

Собрав воедино все полученные результаты, получаем

Ответ: при $a < 1$ нет решений

при $a = 1$ уравнение имеет одно решение

при $a\epsilon(1; 2)$ и $a\epsilon(2{,}5;\ +\infty)$ уравнение имеет два решения

при $a = 2$ и $a = 2{,}5$ уравнение имеет три решения

при $a\epsilon[2; 2{,}5]$ уравнение имеет четыре решения

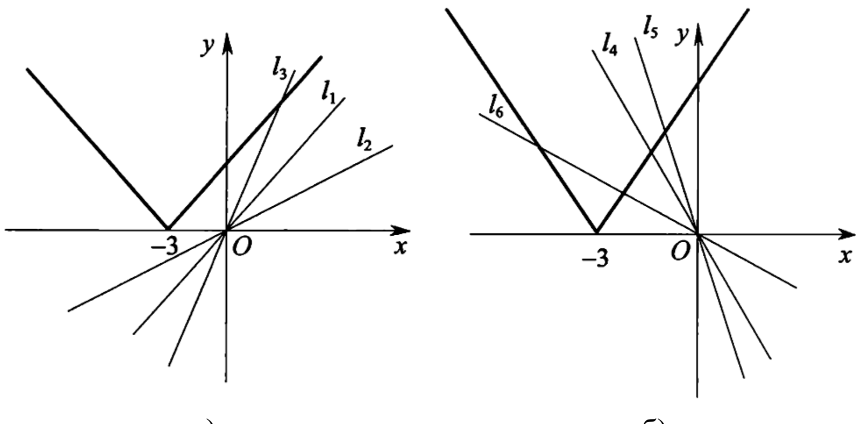
§4. Сечение семейством прямых $y = ax$

Задача 4.1. При всех *a* определить число решений уравнения $|x + 3| = ax$

Решение.

Построим графики $y_1 = |x + 3|$ и $y_2 = ax$. Поэтому график функции y_1представляет собой уголок с вершиной *x* = – 3. Раскрывая знак модуля у функции y_1, получаем

$$y_1 = \begin{cases} x + 3 \text{ при } x \geq -3 (\text{левая часть уголка}) \\ -x - 3 \text{ при} x \leq -3 \text{ (правая часть уголка)} \end{cases}$$



а) б)

рис. 4.1

(График функции y_1 можно получить путем перемещения графика $|x|$ на 3 единицы влево вдоль оси Ox)
График $y_2 = ax$ при каждом конкретном значении a представляет собой прямую; при разных a разные прямые, но все они проходят через начало координат (рис. 4.1)
Найдем число точек пересечения этих графиков в зависимости от значений a. Рассмотрим три случая: $a = 0$; $a > 0$ и $a < 0$.
1) Если $a = 0$, то $y_2 = 0$. Это прямая, совпадающая с осью Ox. Она имеет с уголком $y_1 = |x+3|$ одну общую точку $x = -3$.
2) При любых $a > 0$ прямая $y_2 = ax$ проходит ниже вершины «уголка» (рис.4.1a), поэтому она не пересекается с левой ветвью уголка $y_1 = |x+3|$. Найдем, при каких a она пересекается с правой ветвью этого уголка. Правая ветвь имеет уравнение $y_1 = x + 3$. Угловой коэффициент этой прямой $k = 1$. Следовательно, при $a = 1$ прямая $y_2 = ax$ параллельна правой ветви уголка (рис.4.1a, прямая l_1).
Из этого следует, что при $0 < a < 1$ прямая $y_2 = ax$ будет расходиться с правой ветвью (рис.4.1а, прямая l_2). Поэтому при $0 < a \le 1$ уравнение решений не имеет.
При $a > 1$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекаться с правой ветвью $y_1 = x + 3$ (рис.4.1а, прямая l_3). Следовательно, уравнение будет иметь одно решение.
Случай $a \ge 0$ полностью исследован.
3) $a < 0$. Очевидно, что при $a < 0$, любая прямая $y_2 = ax$ пересекается с правой ветвью уголка $y_1 = |x+3|$ (рис. 4.1б). Это означает, что при $a < 0$ одно решение всегда имеется. Найдем теперь, при каких a прямая $y_2 = ax$ пересекается с левой ветвью уголка. Левая ветвь имеет уравнение $y_1 = -x - 3$. Следовательно, при $a = -1$ прямая $y_2 = ax$ будет ей параллельна (рис.4.1б, прямая l_4), а при $a < -1$ прямая $y_2 = ax$ будет с ней расходиться (рис.4.1б, прямая l_5). Следовательно, при $a < -1$ и $a = -1$ уравнение будет иметь только одно решение.
А вот при $-1 < a < 0$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекать и правую, и левую ветви уголка (рис.4.1б, прямая l_6) и, следовательно, уравнение будет иметь два решения
Ответ: при $0 < a \le 1$ уравнение решений не имеет;
при $a > 1$, $a \le -1$, $a = 0$ одно решение;
при $-1 < a < 0$ два решения.

Пример 4.2. При каких положительных a уравнение $|2x+8| + |2x-6| = ax$ имеет одно решение
Решение.
Нарисуем графики функций $y_1 = |2x+8| + |2x-6|$ и $y_2 = ax$. График $y_2 = ax$ при каждом a представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Как строится график y_1, мы разбирали в задаче 1.1. Здесь только напомним

$$y_1 = \begin{cases} -4x - 2, \text{если } x \le -4 \\ 14, \quad\quad \text{если } -4 \le x \le 3 \\ 4x + 2, \text{если } x \ge 3 \end{cases}$$

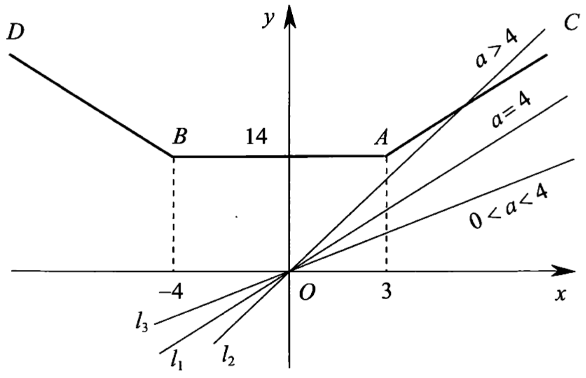


рис. 4.2

Итак, нам надо найти положительные значения a, при которых графики y_1 и y_2 не пересекаются.
Правая ветвь имеет уравнение $y_1 = 4x + 2$. Поэтому прямая $y_2 = ax$ будет параллельна этой ветви при $a = 4$ (рис.4.2, прямая l_1). Следовательно, при любом $a > 4$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекаться с правой ветвью $y_1 = 4x + 2$ (рис.4.2, прямая l_2). Из сказанного ясно, что при $a > 4$ уравнение имеет одно решение, и не имеет решений при $0 < a \leq 4$.
Ответ: $0 < a \leq 4$.

Пример 4.3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{6}{x} - 3\right| = ax - 2$$

на промежутке (0;+∞) имеет ровно три корня.
Решение.
Найдем все значения параметра a, при которых прямая $y_1 = ax - 2$ имеет ровно три общие точки с той частью графика функции $y_2 = \left|\frac{6}{x} - 3\right|$, которая расположена в правой полуплоскости ($x > 0$). Последний график представляет собой правую ветку гиперболы $y = \frac{6}{x}$ которую а) сместили на 3 единицы вниз, б) ту часть графика, которая расположена ниже оси *Ox* зеркально отразили относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость. Заметим также, что прямая $y = ax - 2$ проходит через точку (0; -2) при любом значении параметра a, который является угловым коэффициентом.

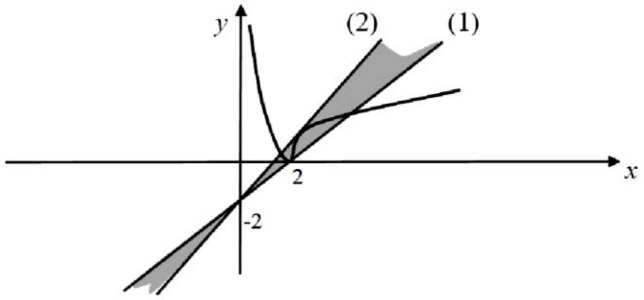


рис. 4.3

Видим, что условию задачи отвечают все прямые, расположенные внутри заштрихованной области.
Значение параметра, соответствующее границе (1), находим из уравнения $0 = 2a - 2$, a=1.
Значение параметра, соответствующее границе (2), находим из условия касания прямой $y = ax - 2$ и графика функции $y = -\left(\frac{6}{x} - 3\right)$ (отраженной части гиперболы).
Уравнение $-\frac{6}{x} + 3 = ax - 2$ должно иметь ровно один корень. После преобразований получаем квадратное уравнение $ax^2 - 5x + 6 = 0$ (очевидно, что $a > 0$), дискриминант которого приравниваем к нулю: $25 - 24a = 0$, $a = \frac{25}{24}$. Условию удовлетворяют все $a \epsilon \left(1; \frac{25}{24}\right)$.
Ответ: $\left(1; \frac{25}{24}\right)$

§5. Касание параболы и прямой

Прежде, чем переходить к следующей задаче, рассмотрим условия, при которых прямая $y_1 = kx + m$ касается параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Случай касания прямой и параболы означае, что они имеют только одну общую точку (рис.5.1).

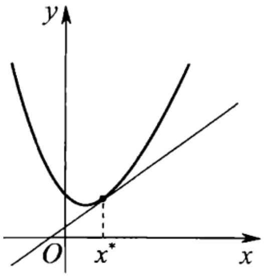


рис.5.1

На языке алгебры это означает, что равенство $y_1 = y_2$ выполняется только при одном значении x. Или другими словами, что уравнение $kx + m = ax^2 + bx + c$ имеет ровно одно решение. Перенося все члены этого уравнения в одну сторону, приходим к квадратному уравнению

$$ax^2 + (b - k)x + (c - m) = 0$$

А квадратное уравнение имеет одно решение только в том случае, когда его дискриминант равен 0. Это и есть необходимое и достаточное условие касания прямой $y_1 = kx + m$ и параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Из сказанного сразу следует: если $D > 0$, то уравнение имеет два решения x_1 и x_2. А это означает, что прямая y_1 пересекает параболу y_2 в двух точках (рис. 5.2)

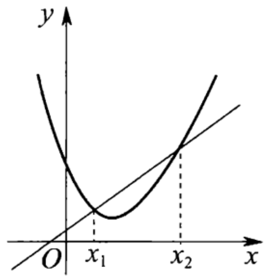


рис. 5.2

И, наконец, если $D < 0$, то парабола и прямая не имеют общих точек (рис.5.3)

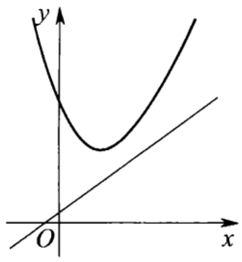


рис. 5.3

Заметим также, что из произвольной точки A, находящейся вне параболы, к параболе можно провести две касательные (на рис.5.4 это касательные l_1 и l_2, проведенные из точки A). Ясно, что l_1 и l_2 касаются параболы в разных точках.

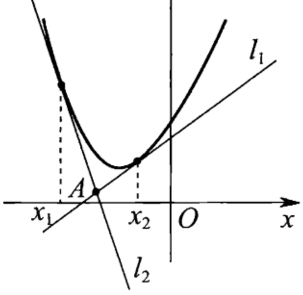


рис. 5.4

Задача 5.1. При всех $a \geq 0$ определить число решений уравнения

$$|x^2 - 10x + 16| = ax$$

Решение.

Построим графики $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = ax$ (рис. 5.5). Построение графика $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ было разобрано в задаче 1.2. Напомним,

$$y_1 = |x^2 - 10x + 16| = \begin{cases} x^2 - 10x + 16, \text{если } x \leq 2, x \geq 8 \\ -x^2 + 10x - 16, \text{если } 2 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

То есть график $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ состоит из двух парабол: параболы $y_1 = x^2 - 10x + 16$ на множестве $x \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$ и параболы $y_1 = -x^2 + 10x - 16$ на множестве $x \in [2; 8]$. График $y_2 = ax$ при всех a есть прямая, проходящая через начало координат.

Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a > 0$.

<u>Случай 1.</u> $a = 0$. Тогда $y_2 = 0$ есть прямая, совпадающая с осью Ox. Она пересекает график y_1 в двух точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$ (рис.5.5). Следовательно, при $a = 0$ уравнение имеет два решения.

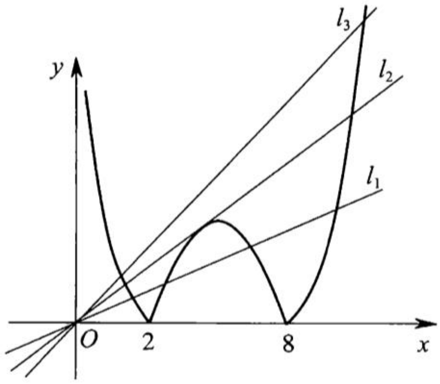


рис. 5.5

<u>Случай 2.</u> $a > 0$. Тогда при «небольших» a, прямая $y_2 = ax$ пересекает график y_1 в четырех точках (рис.5.6, прямая l_1). Это будет до момента касания прямой $y_2 = ax$ с параболой $y_1 = x^2 - 10x + 16$ (прямая l_2). Найдем, при каких a прямая $y_2 = ax$ касается параболы.

Касание параболы и прямой равносильно тому, что уравнение

$$-x^2 + 10x - 16 = ax \Leftrightarrow x^2 + (a - 10)x + 16 = 0$$

имеет одно решение. Это будет, если $D = 0$. Имеем

$$D = (a - 10)^2 - 64 = a^2 - 20a + 36 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 18$$

Итак, касание прямой $y_2 = ax$ и параболы будет при двух значениях a. Но нам подходит только одно значение $a = 2$. Дело в том, что мы рассматриваем не всю параболу $y_1 = x^2 - 10x + 16$, а только ее часть на промежутке $[2; 8]$ и при $a = 2$, прямая $y_2 = ax$ будет касаться нашей параболы внутри рассматриваемого промежутка; при $a = 18$ касание будет вне этого промежутка. Покажем это.

1) $a = 2$. Уравнение имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 2x$ при этом значении a.

Оно имеет единственное решение $x = 4$ и есть точка касания. Она принадлежит промежутку $[2; 8]$. Сказанное выше проиллюстрировано на рис. 5.6

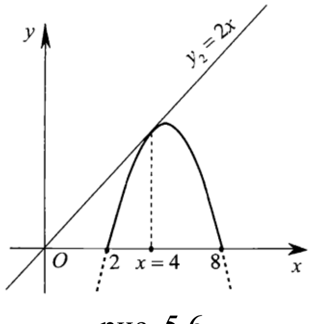


рис. 5.6.

2) a = 18. Тогда уравнение имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 18x$. Его единственное решение $x = -4$ находится вне промежутка $[2; 8]$, на котором рассматривается наша парабола y_1.

Итак, нам подходит только a = 2.

Возвратимся к графикам на рис. 5.5. Из вышесказанного ясно, что при $0 < a < 2$ уравнение имеет четыре решения (прямая l_1). При a = 2 – три решения (прямая l_2). При $a > 2$ - два решения (прямая l_3).

Ответ: при a = 0 и $a > 2$ два решения
при a = 2 три решения
при $a \in (0; 2)$ четыре решения

§ 6. Полуокружность и прямая

Задача 6.1. При каких значениях a неравенство $\sqrt{a^2 - x^2} > 9 - \frac{2x}{3} - \frac{a}{2}$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение.

1) a = 0. Тогда наше неравенство имеет вид $\sqrt{-x^2} > 9 - \frac{2x}{3}$, которое, очевидно, решений не имеет.

2) $a \neq 0$. Построим графики $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y_2 = 9 - \frac{2x}{3} - \frac{a}{2}$. График y_1 есть полуокружность с центром в точке в начале координат и радиусом $|a|$ (см. задачу 1.4). График y_2 – прямая. Оба этих график представлены на рис. 6.1.

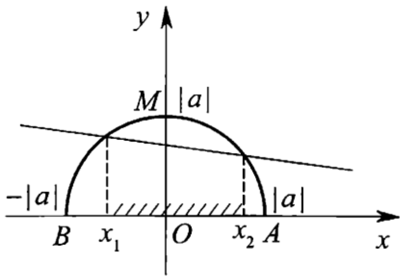


рис. 6.1

Решением неравенства будут все точки, при которых график y_1находится выше графика y_2, причем, согласно условию задачи, среди решений должно быть хотя бы одно отрицательное. Это будет в том и только том случае, если прямая y_2 будет проходить ниже точки $M(0; |a|)$

Последнее будет иметь место, если $y_2(0) = 9 - \frac{2\cdot 0}{3} - \frac{a}{2} < |a|$

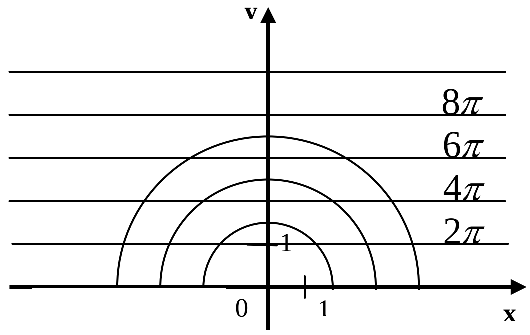
Итак, нам осталось решить неравенство $|a| + \frac{a}{2} - 9 > 0$.

Случай 1.
$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a + \frac{a}{2} - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 6$$

Случай 2
$$\begin{cases} a \leq 0 \\ a + \frac{a}{2} - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -18$$

Ответ: $a \in (-\infty; -18) \cup (6; +\infty)$

Пример 6.2. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 решений.



Решение.

Имеем $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k, \quad k \in Z$. Рассмотрим функцию $y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}$ *и* $y_2 = 2\pi k$. Первая из них задает семейство полуокружностей с центром в точке с координатами $(0;0)$ и радиусом $|a|$, второе семейство прямых параллельных оси абсцисс.

Число корней будет соответствовать числу 8 тогда, когда радиус полуокружности будет больше 6π и меньше 8π, то есть $6\pi < r < 8\pi$. *Ответ*. $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

§7. Координатная плоскость (*x;a*)

Рассмотрим метод, упрощающий работу по решению уравнений с параметром. Метод состоит в следующем:

1. Из уравнения с переменной *x* и параметра *a* выразим параметр как функцию от *x*: $a = f(x)$.
2. В координатной плоскости *x*O*a* строим график функции $a = f(x)$.
3. Рассмотрим прямые $a = const$ и выделим те промежутки оси O*a*, на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям: а) не пересекает график функции $a = f(x)$, б) пересекает график функции $a = f(x)$ в одной точке, в) в двух точках, г) в трех точках и так далее.
4. Если поставлена задача найти значения *x*, то выражаем *x* через *a* для каждого из найденных промежутков значения *a* в отдельности.

Взгляд на параметр как на равноправную переменную находит свое отражение в графических методах. Таким образом, возникает координатная плоскость $(x;a)$. Казалось бы, такая незначительная деталь, как отказ от традиционного обозначения координатной плоскости буквами *x* и *y* определяет один из эффективнейших методов решения задач с параметрами.

Пример 7.1. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x + a} = x$ имеет два корня?

Решение. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$$

Графиком функции $a = x^2 - x$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы – точка с координатами $x_0 = \frac{1}{2}, a_0 = -\frac{1}{4}$

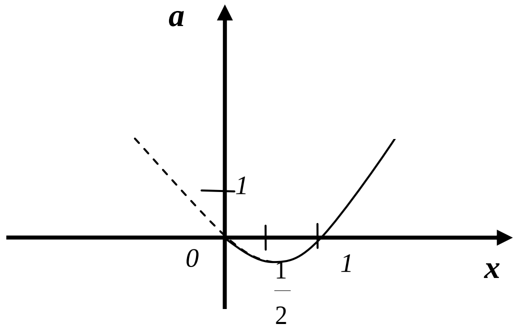


рис. 7.1

Из графика (рис. 7.1) видно, что при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет 2 корня.

Ответ. При $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет два корня.

Задача 7.2. При каких значениях *a* уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три корня?
Решение.
Имеем

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 1 \\ a = |x - 2| - 1 \end{array}\right.$$

График этой совокупности – объединение «уголка» и параболы (рис. 7.2). Очевидно лишь прямая *a* = - 1 пересекает полученное объединение в трех точках.
Ответ: a = - 1

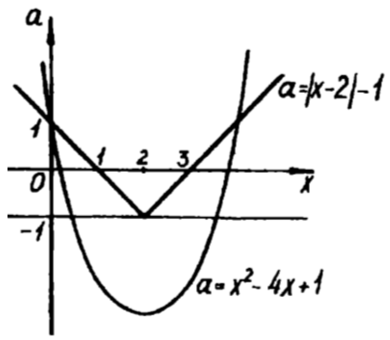


рис. 7.2

Задача 7.3. Для каждого значения *a* решить уравнение $|x + 3| - a|x - 1| = 4$. При каких *a* это уравнение имеет два решения?
Решение.
Заметим, что *x* = 1 является корнем нашего уравнения $|x + 3| - a|x - 1| = 4$ при любом значении параметра *a*. Будем искать другие корни.
Из уравнения выразим *a* через *x*.

$$a = \frac{|x + 3| - 4}{|x - 1|}$$

Рассмотрим графики функций $y_1 = \frac{|x+3|-4}{|x-1|}$ и $y_2 = a$

Область определения функции y_1: все действительные числа, кроме 1

Для построения графика функции y_1раскроем знак модуля обоих выражений. Для этого приравняем к нулю оба выражения под знаками модуля:

1) $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; 2) $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Нанесем точки $\boldsymbol{x=-3}$ и $\boldsymbol{x=1}$ на числовую прямую (рис.1.1). Они разбили числовую прямую на три промежутка.

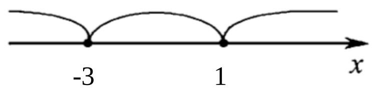


рис. 7.3

1) При $x \le -3$ имеем $x+3 \le 0$, $x-1<0$. Поэтому $|x+3| = -(x+3) = -x-3$, $|x-1| = -(x-1) = -x+1$. Следовательно,

$$y_1 = \frac{|x+3|-4}{|x-1|} = \frac{-x-3-4}{-x+1} = \frac{-x-7}{-x+1} = \frac{x+7}{x-1} = \frac{x-1+8}{x-1} = 1+\frac{8}{x-1}$$

2) При $-3 \le x < 1$ выражение $x+3 \ge 0$, а выражение $x-1<0$. Поэтому $|x+3| = x+3$, $|x-1| = -(x-1) = -x+1$. Следовательно,

$$y_1 = \frac{|x+3|-4}{|x-1|} = \frac{x+3-4}{-x+1} = \frac{x-1}{-x+1} = -\frac{x-1}{x-1} = -1$$

3) При $x>1$ оба выражения $x+3>0$ и $x-1>0$. Поэтому$|x+3| = x+3$, $|x-1| = x-1$. Следовательно,

$$y_1 = \frac{|x+3|-4}{|x-1|} = \frac{x+3-4}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Итак, исходную функцию можно записать в виде

$$y_1 = \begin{cases} 1+\dfrac{8}{x-1} \text{ при } x \le -3 \\ -1 \text{ при } -3 \le x < 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

График данной функции изображен на рис. 7.4

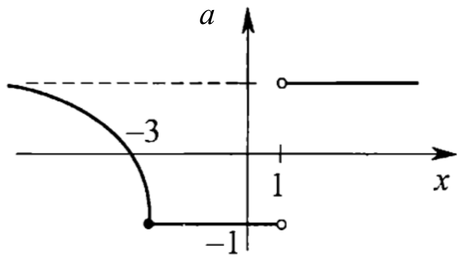


рис. 7.4

При всех a график $y_2 = a$ представляет собой прямые, параллельные оси Ox

Из графика на рис.7.4 ясно следующее:

1) При $a < -1$ решений нет

2) При $a = -1$ решениями будут $x \in [-3;1)$

3) При $a \in (-1;1)$ уравнение имеет одно решение. Это точка пересечения графиков $y_1 = 1+\frac{8}{x-1}$ и $y_2 = a$. Имеем

$$1+\frac{8}{x-1} = a \Leftrightarrow \frac{8}{x-1} = a-1 \Leftrightarrow x-1 = \frac{8}{a-1} \Leftrightarrow x = \frac{8}{a-1}+1 = \frac{a+7}{a-1} - \text{ решение}$$

4) При $a = 1$ уравнение имеет решениями $x \in (1;+\infty)$

5) При $a > 1$ графики y_1 и y_2 не пересекаются и, следовательно, уравнение не имеет решений

Теперь, вспомнив, что $x = 1$ является корнем при любом a, добавим этот корень во все случаи. Получим окончательный ответ.

Ответ: при $a < -1$ решение $x = 1$

при $a = -1$ решение $x \in [-3; 1]$

при $a \in (-1; 1)$ уравнения $x = 1$ и $x = \frac{a+7}{a-1}$

при $a = 1$ решение $x \in [1; +\infty)$

при $a > 1$ решение $x = 1$