

ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Применение нескольких задач-теорем в решении геометрических задач

Планиметрия, пожалуй, один из самых интересных и вместе с тем один из самых сложных разделов школьной математики. Геометрию, как предмета, боятся и ученики и учителя. Нет ни алгоритмов, ни единых правил, зато есть много формул и теорем. Впрочем, одно правило можно сформулировать: чтобы научиться решать геометрические задачи, надо их решать. Можно предложить и некоторые приемы, которые могут помочь найти «ключ» к геометрическим задачам.

Например, полезно начать решение с того, что отметить на чертеже все равные элементы (углы, отрезки), затем вычислить «все, что можно», то есть найти те величины, которые легко определяются исходя из условия задачи. Затем продолжить решать задачу «с конца»: ответить на вопрос, что надо знать, чтобы получить искомую величину. Возможно, окажется, что все необходимые элементы вы уже знаете или можете легко их получить.

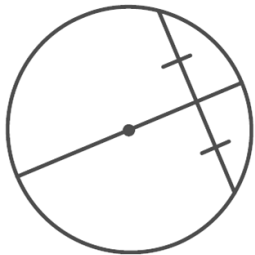
Можно попробовать решить задачу с помощью алгебры. Для этого обозначить все неизвестные элементы за x , y , z и т.д., а затем составить систему уравнений и/или неравенств, связывающих эти неизвестные.

Конечно, наиболее красивые и короткие решения получаются, если удастся провести удачные дополнительные построения. А как их увидеть? Как понять какой метод подойдет к данной конкретной задаче? Здесь можно провести аналогию с шахматной игрой. Хороший шахматист знает наизусть много шахматных партий. Чтобы научиться хорошо решать геометрические (особенно планиметрические) задачи надо знать решения многих задач. Именно решения, а не только результат.

В литературе появились термины: *задачи-теоремы*, *опорные*, *базисные*, *ключевые задачи* и т.п. Это задачи, которые часто и эффективно используются при решении других задач наряду с главными теоремами геометрии: теоремой Пифагора, теоремой косинусов, теоремой синусов и др. Предпочтительнее термин *задачи-теоремы*, т.к. одни из них являются теоремами в действующем школьном учебнике, а другие – задачами. В другом учебнике их роли могут поменяться. При построении курса геометрии в него включаются, в основном, теоремы, необходимые для развития и изучения теории. Их количество ограничено, разделение предложений на теоремы и задачи относительно и условно.

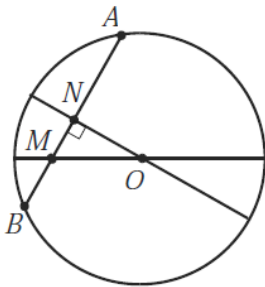
Выделим 25 задач-теорем и рассмотрим примеры, в которых применение той или иной задачи-теоремы целесообразно и дает главную идею решения. Задачи-теоремы нужно выучить наизусть. Только после этого и большого количества самостоятельно решенных задач можно говорить о начале приобретения собственного опыта и формирования геометрической интуиции, которую развить гораздо труднее, чем заучить готовые решения и доказательства.

I. Окружность (хорды, касательная, углы)

1		Диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей. Верно и обратное утверждение.
---	---	---

1.1. В окружности с центром O проведена хорда AB , пересекающая диаметр в точке M и составляющая с диаметром угол, равный 60° . Найти OM , если $AM = 10$ см, а $BM = 4$ см.

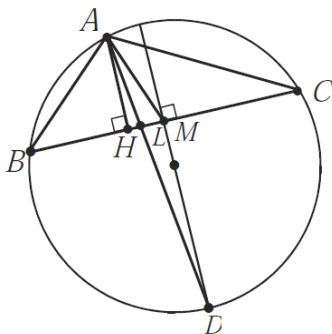
Решение



По условию $\angle NMO = 60^\circ$. Проведем диаметр, перпендикулярный хорде AB и пересекающий ее в точке N . Тогда $AN = BN = (10 + 4) : 2 = 7$ (см), $NM = 7 - 4 = 3$ (см). В треугольнике MON : $\angle ONM = 90^\circ$, $\angle NOM = 30^\circ$, $MO = 2 MN = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

Ответ: 6 см.

1.2. Докажите, что в любом неравнобедренном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.



Доказательство

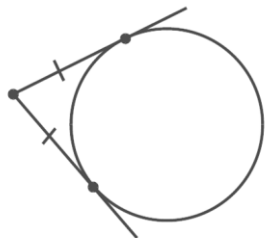
Окружность не задана в условии задачи явно. Но она существует потому, что около всякого треугольника можно описать единственную окружность.

Пусть AH , AL и AM соответственно высота, биссектриса и медиана треугольника ABC .

Проведем диаметр его описанной окружности перпендикулярно хорде BC . Он делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам. Следовательно, диаметру принадлежит точка M , а один из его концов совпадает с

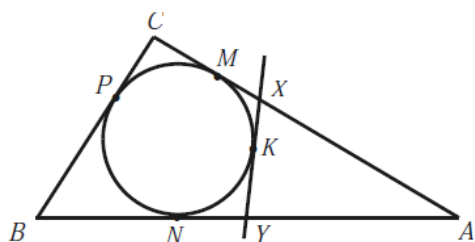
точкой D , в которой биссектриса угла A пересекает окружность ($\angle BAD = \angle CAD$).

Таким образом, точки H и M – проекции концов отрезка AD на сторону BC , что и доказывает утверждение.

2		Отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны.
---	---	--

2.1. В треугольник со сторонами 6 см, 10 см и 12 см вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найти периметр отсеченного треугольника.

Решение



Пусть $BC = 6$ см, $AC = 10$ см, $AB = 12$ см. Заметим, что C – тупой угол, т. к. $12^2 > 6^2 + 10^2$.

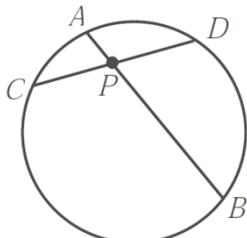
Проведем касательную к окружности, пересекающую две большие стороны треугольника в точках X , Y , и обозначим точки касания M , N , P и K .

Учитывая равенство пар отрезков касательных, проведенных к окружности из точек X и Y , заметим,

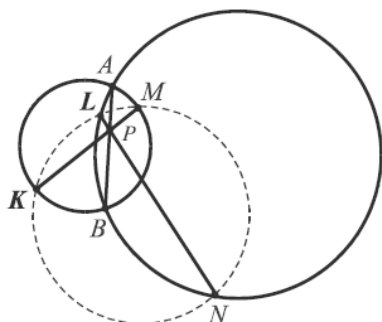
что $P_{AXY} = AM + AN = 2 AM$ ($AM = AN$ и $XY = XK + KY = XM + YN$).

Но $AM + AN = (10 + 12) - 6 = 16$ (см), потому что $CM = CP$ и $BN = BP$, а $BP + PC = BC = 6$ см.

Ответ: 16 см.

3		Если AB и CD хорды окружности, пересекающиеся в точке P, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.
---	---	---

3.1. Через точку P , лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ – вписанный.



Доказательство

По задаче-теореме 3 для пересекающихся хорд первой окружности $AP \cdot PB = KP \cdot PM$.

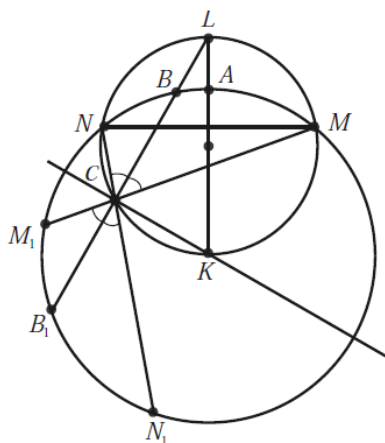
Аналогично, для второй окружности:

$$AP \cdot PB = LP \cdot PN.$$

$$\text{Значит, } KP \cdot PM = LP \cdot PN \left(\frac{PM}{PN} = \frac{LP}{KP}, \Delta KLP \sim \Delta MPN \right),$$

т. е. хорды KM и LN разных окружностей служат пересекающимися хордами третьей окружности, в которую и вписан четырехугольник $KLMN$.

3.2. Дана окружность с диаметром KL . Вторая окружность с центром в точке K пересекает первую окружность в точках M и N , а диаметр KL – в точке A . На дуге AN , не содержащей точки M , взята точка B , отличная от точек A и N . Луч LB пересекает первую окружность в точке C . Известно, что $CN = a$, $CM = b$. Найдите BC .



Решение

Продлив отрезки CB , CN , CM за точку C до пересечения со второй окружностью в точках B_1 , N_1 , M_1 , получим пересекающиеся хорды, и по задаче-теореме 3 запишем равенства

$$BC \cdot BC_1 = NC \cdot NC_1 = MC \cdot MC_1 \quad (1).$$

Но длины отрезков BC_1 , NC_1 , MC_1 пока неизвестны.

$\angle KCL = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, а т.к. K – центр, то прямая CK содержит диаметр второй окружности. Значит, $CK \perp BB_1$ и по задаче-теореме 1 диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам, т.е. $BC = BC_1$.

Далее рассмотрим восемь углов при вершине C .

$$\angle NCL = \angle MCL = \angle N_1CB_1 = \angle M_1CB_1.$$

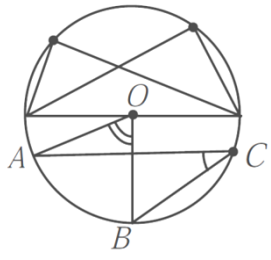
Действительно, первые два угла равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги NL и ML первой окружности ($MN \perp KL$), а остальные углы являются соответственно вертикальными для них.

Ясно, что остальные четыре угла также равны между собой. Отсюда следует, что CK – ось симметрии, а пары точек, расположенные на второй окружности, B и B_1 , N и M_1 , M и N_1 – симметричны относительно этой прямой, т.е. $CN = CM_1 = a$, $CM = CN_1 = b$.

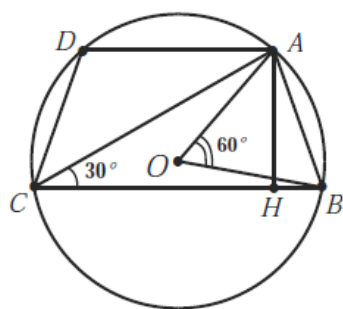
Равенство (1) примет вид: $BC_2 = NC \cdot NC_1 = NC \cdot CM = a \cdot b$.

Следовательно, $BC = \sqrt{ab}$.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

4		Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается. Следствие: вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. Замечательное свойство окружности. Вписанные углы, опирающиеся на половину окружности (диаметр), прямые.
---	---	---

4.1. Найти площадь равнобокой трапеции, если её высота равна h , а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60° .



Решение

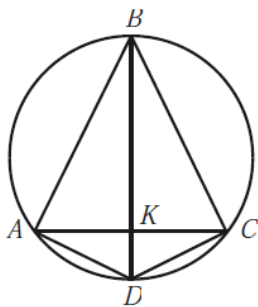
Пусть в заданной трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AN \perp CB$, $AN = h$, O – центр описанной окружности, $\angle AOB = 60^\circ$.

Проведем диагональ AC . Вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB , на которую он опирается, или половиной соответствующего центрального угла AOB , $\angle ACB = 30^\circ = \angle ACH$.

Из $\triangle ACH$: $CH = h\sqrt{3}$. Известно, что в равнобедренной трапеции отрезок CH равен средней линии, поэтому $S_{ABCD} = AN \cdot CH = h \cdot h \cdot \sqrt{3}$.

Ответ: $h^2\sqrt{3}$.

4.2. В окружность вписан четырехугольник с углами 120° , 90° , 60° , 90° и площадью $9\sqrt{3} \text{ см}^2$. Найти радиус окружности, если диагонали четырехугольника перпендикулярны.



Решение

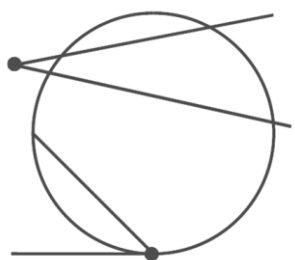
Пусть в заданном четырехугольнике $ABCD$: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle D = 120^\circ$, $BD \perp AC$, $K = AC \cap BD$.

Из замечательного свойства окружности следует, что BD – диаметр. Но по условию $BD \perp AC$. Значит, BD принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AC , поэтому треугольники BCD и BAD симметричны относительно прямой BD и равновелики. Имеем: $S_{ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

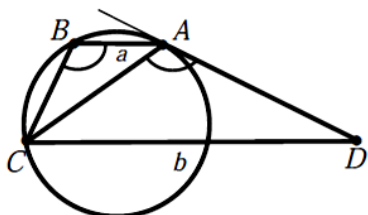
Далее заметим, что $\angle ABD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$, т.е. $\triangle ABD$ – это половина правильного треугольника, стороной которого служит BD , а площадь равна $2 S_{ABD}$ или S_{ABCD} . Из формулы для площади правильного треугольника $(\frac{BD^2\sqrt{3}}{4})$ находим:

$$BD^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 36, \text{ т.е. } BD = 6 \text{ см. } \frac{BD}{2} = 3 \text{ см.}$$

Ответ: 3 см.

5		Угол, вершина которого вне (внутри) круга, измеряется полуразностью (полусуммой) дуг, находящихся между его сторонами (и их продолжениями за вершину угла). Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, находящейся между его сторонами.
---	---	---

5.1 В трапеции $ABCD$ основание $AB = a$, основание $CD = b$ ($a < b$). Окружность, проходящая через вершины A , B и C , касается стороны AD . Найти диагональ AC .



Решение

Прежде всего заметим, что вписанный угол CBA и угол между касательной AD и хордой AC измеряются половиной одной и той же дуги AC .

Отсюда $\angle CAD = \angle CBA$.

Кроме того, $\angle CAB = \angle ACD$.

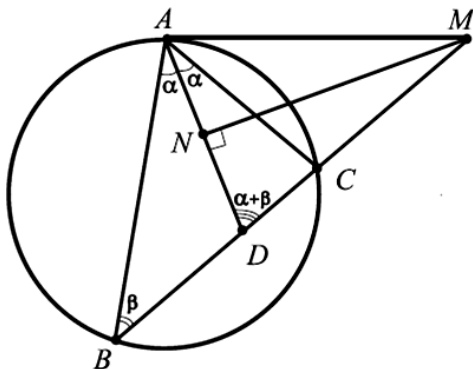
Значит, $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ и верна пропорция:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad \text{или} \quad \frac{a}{AC} = \frac{AC}{b}$$

Имеем: $AC^2 = ab$.

Ответ: $\sqrt{ab}$

5.2. В треугольнике ABC биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . Серединный перпендикуляр, проведенный к AD , пересекает прямую BC в точке M . Доказать, что AM – касательная к описанной окружности треугольника ABC .



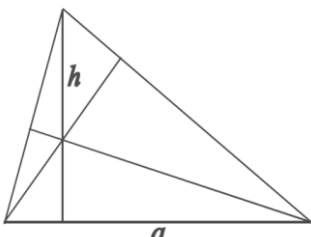
Доказательство

Пусть $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$, $\angle B = \beta$.

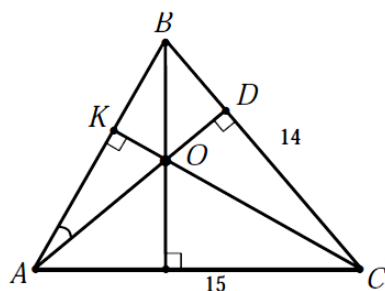
Тогда $\angle ADC = \alpha + \beta$ по теореме о внешнем угле для треугольника ABD . MN – серединный перпендикуляр к AD по условию. Значит, $\triangle ADM$ – равнобедренный и $\angle DAM = \angle ADM = \alpha + \beta$. Но часть угла DAM , угол DAC , равен α , значит $\angle CAM = \beta$.

Обратим внимание на то, что вписанный угол B также равен β . Следовательно, равный ему угол CAM образован хордой и касательной прямой (оба эти угла измеряются половиной дуги AC), т.е. AM – касательная.

II. Треугольник (высоты, медианы, биссектриса)

6		Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре). Если известны стороны треугольника a, b и c, то $h = \frac{2S}{a}$ или $a = \frac{2S}{h}$, где h – высота, проведенная к стороне a, S – площадь треугольника, определяемая по формуле Герона.
---	---	--

6.1. В треугольнике ABC : $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Найти расстояние от точки пересечения его высот до вершины A .



Решение

Пусть O – ортоцентр треугольника. Требуется найти AO .

Вычислим площадь S треугольника ABC по формуле Герона:

$$\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8} = 7 \cdot 3 \cdot 4 \text{ (см}^2\text{)}$$

Далее найдем высоты AD и CK .

$$AD = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{14} = 12 \text{ (см)}.$$

$$CK = \frac{2S}{AB} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4}{13} = \frac{168}{13} \text{ (см)}.$$

Имеем из $\triangle ACK$:

$$AK = \sqrt{15^2 - (168/13)^2} = \frac{1}{13} \sqrt{195^2 - 168^2} = \frac{1}{13} \sqrt{27 \cdot 363} = \frac{1}{13} \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 121} = \frac{99}{13} \text{ (см)}.$$

$\triangle AOK \sim \triangle ABD$ (прямоугольные треугольники с общим острым углом), поэтому

$$\frac{12}{13} = \frac{99}{13 \cdot OA}, \quad 12 \cdot OA = 99, \quad OA = \frac{33}{4} \text{ (см)}.$$

Ответ: 8,25 см

6.2. Большая из параллельных сторон трапеции равна a , меньшая равна b , непараллельные равны c и d . Найти площадь трапеции.

Решение

Проведем в данной трапеции высоту NH и отрезок MN параллельно меньшей боковой стороне. Тогда $MN = c$, $MK = a - b$. Из $\triangle MNK$:

$$NH = \frac{2S_{MNK}}{MK}.$$

Для нахождения площади трапеции запишем формулу

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2S_{MNK}}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} \cdot S_{MNK}.$$

Площадь треугольника найдем по формуле Герона, записанной в равносильном виде:

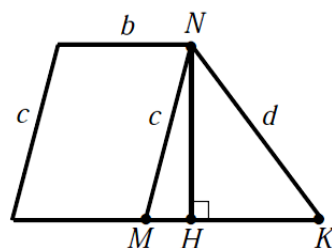
$$S = \frac{1}{4} \sqrt{P(P-2a) \cdot (P-2b) \cdot (P-2c)},$$

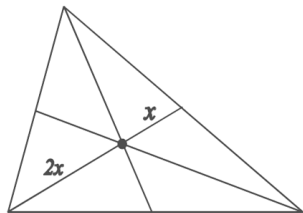
где P – периметр треугольника. В нашем случае:

$$P_{MNK} = a - b + c + d,$$

$$S_{MNK} = \frac{1}{4} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(b-a+c+d)}.$$

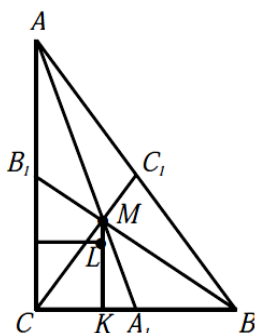
$$\text{Ответ. } \frac{a+b}{4(a-b)} \sqrt{(a-b+c+d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(b-a+c+d)}.$$



7		Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центре тяжести) и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. $m_a = \sqrt{\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$
---	---	---

7.1. Катеты прямоугольного треугольника равны 9 см и 12 см. Найти расстояние между точкой пересечения его биссектрис и точкой пересечения медиан.

Решение



Пусть $AC = 12$ см, $CB = 9$ см, $\angle C = 90^\circ$, CC_1 , BB_1 , AA_1 – медианы, M – центр тяжести, L – инцентр, ML – искомый отрезок.

$AB = 15$ см (пифагорова тройка 9, 12, 15).

Тогда $AC_1 = BC_1 = CC_1 = 15/2$ см.

По свойству медиан: $CM : MC_1 = 2 : 1$,

поэтому $CM = 2/3 \cdot 15/2 = 5$ (см).

Воспользуемся тем, что L – центр вписанной в прямоугольный треугольник окружности, и найдем ее радиус по известной формуле: $CK = LK = (9 + 12 - 15) / 2 = 3$ (см), где $LK \perp BC$.

Далее: $CK = 3$ см, $BK = 9 - 3 = 6$ (см),

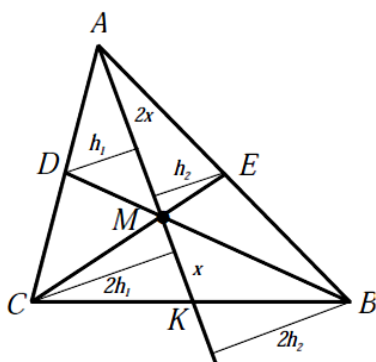
значит, $BK : KC = 6 : 3 = 2 : 1$, но и $BM : MB_1 = 2 : 1$ (по свойству медиан), следовательно, $MK \parallel CB_1$, $MK \perp BC$, т.е. $L \in MK$ (точки M , L , K лежат на одной прямой). Из $\triangle CMK$: $CM = 5$ см, $CK = 3$ см.

Отсюда $MK = 4$ см. Имеем: $ML = MK - LK = 4 - 3 = 1$ (см).

Ответ: 1 см.

7.2. В треугольнике ABC проведены медианы BD и CE , M – точка их пересечения. Доказать, что треугольник BCM равновелик четырехугольнику $ADME$.

Решение



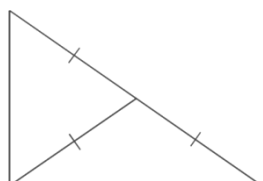
Пусть $MK = x$. Тогда $MA = 2x$.

Проведем высоты h_1 и h_2 в треугольниках AMD и AME . Так как точки D и E – середины сторон AC и AB , то легко видеть, что высоты треугольников MCK и MBK соответственно равны $2h_1$ и $2h_2$. Площади треугольника BCM и четырехугольника $ADME$ запишем как суммы площадей треугольников:

$$S_{ADME} = S_{ADM} + S_{AEM} = \frac{1}{2} \cdot 2x (h_1 + h_2);$$

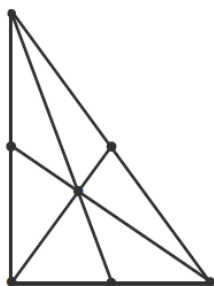
$$S_{BCM} = S_{BMK} + S_{CMK} = \frac{1}{2} \cdot x (2h_1 + 2h_2) = \frac{1}{2} \cdot 2x (h_1 + h_2).$$

Полученные выражения равносильны, значит, $S_{ADME} = S_{BCM}$, что и требовалось доказать.

8		<i>Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника, а длина её равна половине гипотенузы. Верно и обратное утверждение.</i>
---	---	--

8.1. В прямоугольном треугольнике медианы катетов равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найти гипотенузу треугольника

Решение



Стандартное решение сводится к системе из двух уравнений:
 $x^2 + 4y^2 = 52$, $y^2 + 4x^2 = 73$ ($2x$ и $2y$ – катеты треугольника).

Применим задачу-теорему. Пусть медиана, проведенная к гипотенузе, равна m . Тогда гипотенуза будет равна $2m$, ее квадрат – $4m^2$, а сумма квадратов всех сторон треугольника – $8m^2$, т.к. сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

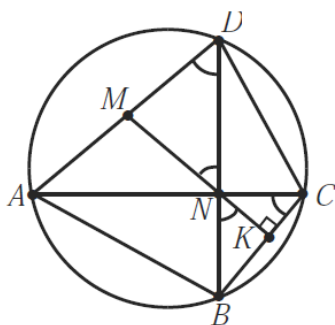
Сумма квадратов всех медиан равна $52 + 73 + m^2$.

Имеем: $\frac{125+m^2}{8m^2} = \frac{3}{4}$ или $4 \cdot 125 = 20m^2$, $5m^2 = 125$, $m = 5$ ($m > 0$),
 $2m = 10$.

Ответ: 10.

8.2. $ABCD$ – вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны. Доказать, что прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей перпендикулярно BC , делит AD пополам.

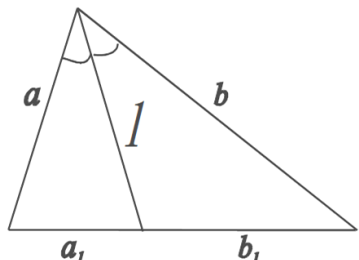
Доказательство



Пусть $N = AC \cap BD$, K – точка пересечения заданной прямой со стороной BC , M – со стороной AD . В конфигурации имеется окружность, поэтому сначала изучим углы.

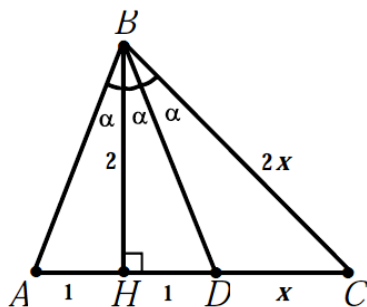
Нетрудно видеть равные пары углов: ADB и ACB , DNM и BNK (первая содержит вписанные углы, опирающиеся на дугу BC , а вторая – вертикальные). Теперь заметим, что два угла из разных пар – ACB (или NCB) и BNK – дополняют угол CNK до прямого, а значит, равны. Отсюда вытекает равенство всех четырех рассмотренных углов.

Следовательно, треугольник DNM – равнобедренный и по задаче-теореме NM является медианой прямоугольного треугольника ADN , делящей AD пополам, ч.т.д.

9		Биссектриса l угла треугольника делит его противоположащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, т.е. $a : b = a_1 : b_1.$ $l = \sqrt{ab - a_1b_1}$
---	---	--

9.1. Высота треугольника, равная 2 см, делит угол треугольника в отношении 2 : 1, а основание – на части, меньшая из которых равна 1 см. Найти площадь этого треугольника.

Решение



$BH \perp AC$, $BH = 2$ см, $AH = 1$ см.

Если $\angle ABH = \alpha$, то $\angle HBC = 2\alpha$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} AC \cdot 2 = AC$.

Проведем биссектрису BD .

Тогда $\angle HBD = \angle DBC = \angle ABH = \alpha$, $HD = AH = 1$ см,

$DB = 5$ см и $BH : HD = BC : CD = 2 : 1$. Если $CD = x$ см,

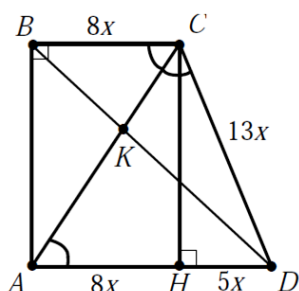
$BC = 2x$ см, то по формуле $BD^2 = BH \cdot BC - HD \cdot CD$

имеем: $(\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2x - 1 \cdot x$, $5 = 3x$, $x = 5/3$ см.

$S_{ABC} = AC = 1 + 1 + 5/3 = 11/3$ (см²).

Ответ: $11/3$ см².

9.2. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ служит биссектрисой тупого угла и делит другую диагональ в отношении 13 : 8. Вычислить площадь трапеции, если ее высота равна 36.



Решение

Пусть CA – биссектриса тупого угла C трапеции $ABCD$,

CH – высота, $CH = 36$.

$CA \cap BD = K$, $DK : KB = 13 : 8$. Тогда $DC : CB = 13 : 8$.

Обозначим DC через $13x$, а CB через $8x$.

Углы DCA и DAC равны, т.к. каждый из них равен углу ACB .

Значит, $\triangle DCA$ – равнобедренный и $DA = DC = 13x$.

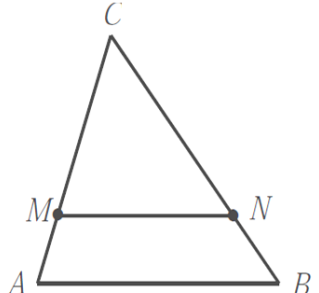
Отсюда $AH = 8x$, $DH = 5x$.

Из $\triangle DCH$: $CH = 12x$ (пифагорова тройка 5, 12, 13).

Имеем: $12x = 36$, $x = 3$, а искомая площадь трапеции равна

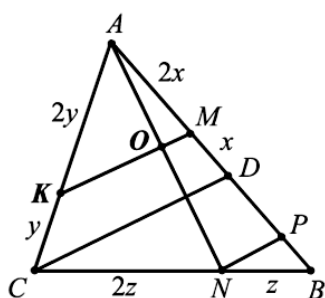
$(8 + 13) \cdot 3 \cdot 18 = 21 \cdot 54 = 1080 + 54 = 1134$.

Ответ: 1134.

10		Если прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке M, а сторону BC в точке N, то треугольники ABC и MNC подобны. Следствие: $CM : MA = CN : NB$.
----	---	---

10.1. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M , N и K так, что $AM : MB = 2 : 3$, $AK : KC = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 2$. В каком отношении прямая MK делит отрезок AN ?

Решение



Проведем $CD \parallel KM$, $NP \parallel KM$ и введем обозначения $AM = 2x$, $MB = 3x$.

Рассуждая, как в предыдущей задаче, применяя следствие из задачи-теоремы, последовательно находим:

$$MD = x, DB = 3x - x = 2x;$$

$$PB = \frac{1}{3} DB = \frac{2x}{3};$$

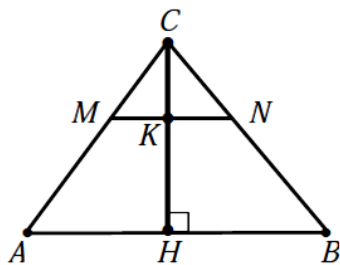
$$MP = MB - PB = 3x - \frac{2x}{3} = \frac{7x}{3}.$$

$$\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MP} = \frac{2x}{\frac{7x}{3}} = \frac{6}{7}.$$

Ответ: $6 : 7$

10.2 Основание треугольника равно 30 см, а боковые стороны 26 и 28 см. Высота разделена в отношении $2 : 3$ (считая от вершины), и через точку деления проведена прямая, параллельная основанию. Определить площадь полученной при этом трапеции.

Решение

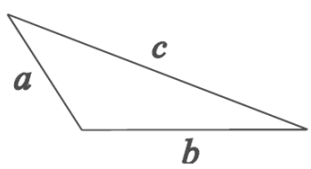


Пусть $AC = 26$ см, $BC = 28$ см, $AB = 30$ см. Проведем высоту CH . $CK : KH = 2 : 3$, где $MN \parallel AB$, $K = MN \cap CH$.

$\triangle CMN \sim \triangle CAB$. Коэффициент подобия равен $2/5$. Значит, отношение площадей этих треугольников равно $4 : 25$ и площадь S трапеции $AMNB$ составляет $21/25$ от площади треугольника CAB .

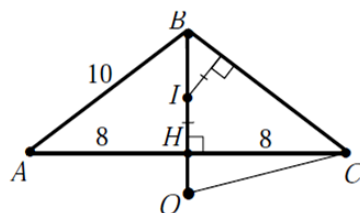
$$\begin{aligned}
 S &= \frac{21}{25} S_{ABC} = \frac{21}{25} \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{21 \cdot 4}{25} \sqrt{7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2} = \\
 &= \frac{21 \cdot 42 \cdot 8}{25} = \frac{42 \cdot 42 \cdot 16}{25 \cdot 4} = \left(\frac{42 \cdot 4}{10}\right)^2 = 16,8^2 = (17 - 0,2)^2 = 289 + \\
 &+ 0,04 - 6,8 = 282,24 \text{ (см}^2\text{)}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $282,24 \text{ см}^2$.

11		Определение вида треугольника. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, и, наоборот. Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона. $c_2 > a_2 + b_2$: треугольник – тупоугольный; $c_2 = a_2 + b_2$: треугольник – прямоугольный; $c_2 < a_2 + b_2$: треугольник – остроугольный.
----	---	---

11.1. В равнобедренном треугольнике основание равно 16 см, а боковая сторона равна 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами.

Решение



Пусть в треугольнике ABC: $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см. Так как он равнобедренный, то центры окружностей, точки I, O , лежат на оси симметрии треугольника, содержащей высоту BH . OI – расстояние между центрами.

Заметим, что $16^2 > 10^2 + 10^2$, поэтому $\angle B > 90^\circ$ и точка O лежит на продолжении отрезка BH .

Очевидно, что $BH = 6$ см, $S_{ABC} = 6 \cdot 8$ (см²).

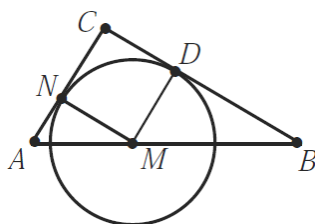
Вычислим радиусы окружностей по известным формулам

$$R = OB = \frac{10 \cdot 10 \cdot 16}{4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{25}{3} \text{ (см)}. \quad r = IH = \frac{6 \cdot 8}{10 + 8} = \frac{8}{3} \text{ (см)}.$$

$$OI = OB - BI = OB - (BH - IH) = \frac{25}{3} + \frac{8}{3} - 6 = 5 \text{ (см)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{8}{3} \text{ см, } \frac{25}{3} \text{ см, } 5 \text{ см.}$$

11.2. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны – касательные к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найти радиус окружности.



Решение

Пусть $AB = 26$, $BC = 24$, $AC = 10$,

M – центр окружности, N – точка касания со стороной AC ,

$MN = r$ – искомый радиус.

Так как $26^2 = 24^2 + 10^2$, то данный треугольник – прямоугольный и $MNCD$ – квадрат.

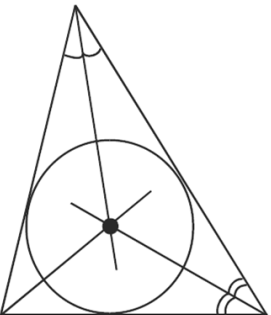
$MN \parallel BC$, поэтому, $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Имеем: $MN = NC$, $AN = 10 - r$,

$$\frac{24}{10} = \frac{12}{5} = \frac{r}{10 - r}, \quad r = \frac{120}{17}.$$

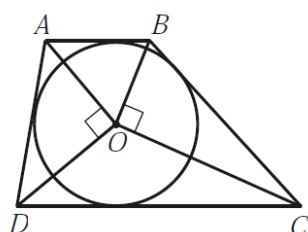
$$\text{Ответ: } \frac{120}{17}$$

III. Окружность и треугольник

12		<i>Во всякий треугольник можно вписать единственную окружность. Её центром является точка пересечения биссектрис углов треугольника.</i> <i>Биссектриса угла есть г.м.т., расположенных внутри угла и одинаково удаленных от его сторон.</i>
----	---	--

12.1. В трапецию $ABCD$ (AB и CD – основания) вписана окружность с центром O . Доказать, что: сумма квадратов расстояний от центра вписанной окружности до вершин трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон.

Решение



Рассмотрим один из треугольников, например, $\triangle AOD$. Его углы $\angle DAO$ и $\angle ADO$ – половины углов A и D трапеции, т.к. AO и DO – биссектрисы этих углов.

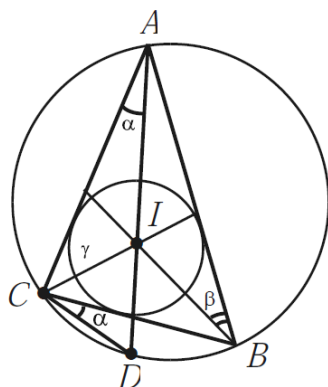
Но $\angle A + \angle D = 180^\circ$. Значит, $\angle DAO + \angle ADO = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. Отсюда $\angle AOD = 90^\circ$.

Аналогично доказывается, что и $\triangle BOC$ – прямоугольный.

Нетрудно убедиться, что утверждение задачи данной задачи получается по теореме Пифагора.

12.2. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D . Найти длину хорды DC , если центр окружности, вписанной в данный треугольник, удален от точки D на расстояние n .

Решение



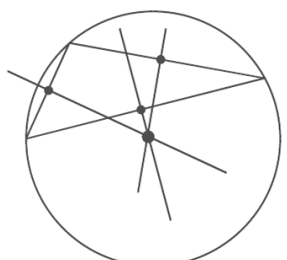
Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник. Из условия следует, что $n = DI$, $I \in AD$, так как центр вписанной окружности – это точка пересечения биссектрис углов треугольника. Проведем биссектрисы углов B и C и обозначим половины углов A , B , C соответственно α , β , γ .

Вписанные углы $\angle DAB$ и $\angle DCB$ опираются на дугу DB , а значит равны: $\angle DCB = \alpha$.

Заметим, что $\angle DCI = \angle DIC$. Действительно, $\angle DCI = \alpha + \gamma$ и $\angle DIC = \alpha + \gamma$ (как внешний угол треугольника AIC).

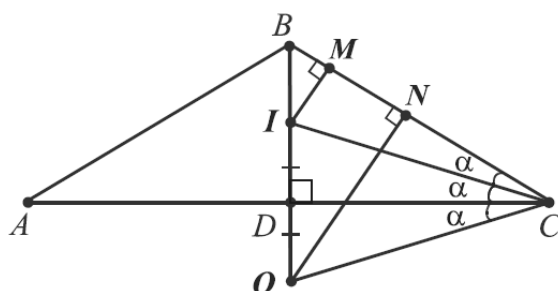
Следовательно, треугольник DIC – равнобедренный с вершиной D , т.е. $DI = DC = n$.

Ответ: n .

13		Около всякого треугольника можно описать единственную окружность. Её центром является точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. Серединный перпендикуляр к отрезку есть г.м.т., равноудаленных от концов отрезка.
----	---	--

13.1. Центр описанной окружности треугольника симметричен его центру вписанной окружности относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

Решение



Пусть центр вписанной окружности I и центр описанной окружности O симметричны относительно стороны AC . Эти точки принадлежат серединному перпендикуляру, проведенному к отрезку AC .

Тогда $\triangle ABC$ – равнобедренный и тупоугольный ($\angle B > 90^\circ$).

Заметим, что треугольники COI и OCB также равнобедренные с основаниями OI и CB .

Действительно, $CO = CI$, так как CD является высотой и медианой в треугольнике COI , а $OC = OB$ как радиусы одной окружности.

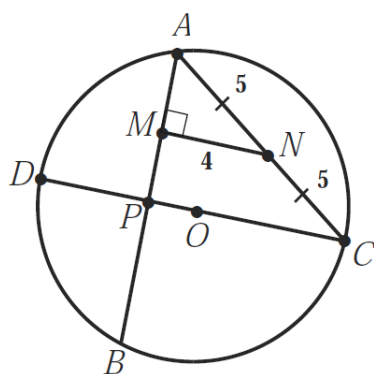
Пусть $\angle OCD = \angle DCI = \angle ICB = \alpha$. Тогда в треугольнике OCB $\angle C = \angle B = 3\alpha$.

В прямоугольном треугольнике DBC : $3\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 18^\circ$.

Итак, $\angle C = \angle A = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$, $\angle B = 6\alpha = 6 \cdot 18^\circ = 108^\circ$.

Ответ: $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.

13.2. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 10 и 12 см. Найти радиус окружности, если расстояние от середины меньшей хорды до большей хорды равно 4 см.



Решение

Пусть $AC = 10$ см, $AB = 12$ см. Точка N – середина меньшей хорды, $AN = NC = 5$ см, $MN = 4$ см, причем $MN \perp AB$.

Проведем $CP \parallel MN$, тогда $CP = 2MN = 2 \cdot 4 = 8$ (см) и $CP \perp AB$.

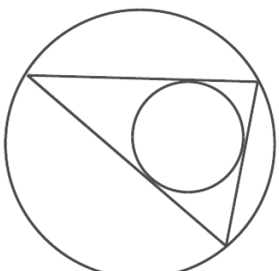
Из $\triangle APC$: $AP = 6$ см (пифагорова тройка). Значит, CP – серединный перпендикуляр к AB , содержащий диаметр данной окружности.

Имеем: $DP \cdot PC = AP \cdot PB$

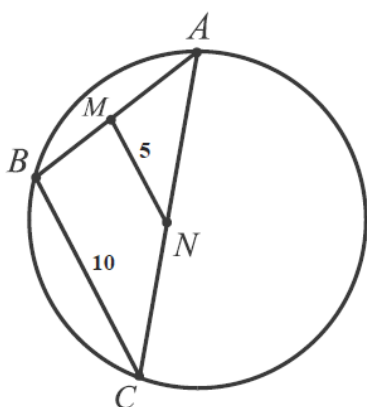
или $DP \cdot 8 = 6 \cdot 6$, $DP = 4,5$ (см).

$OC = (4,5 + 8) : 2 = 6,25$ (см).

Ответ: 6,25 см.

14		Радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника находят по формулам: $r = \frac{S}{p}$ $R = \frac{abc}{4S}$, a, b, c – длины сторон, S – площадь треугольника, p – его полупериметр. Следствие: в прямоугольном треугольнике с гипотенузой c: $r = \frac{a+b-c}{2}, R = \frac{c}{2}$
----	---	---

14.1. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17 см. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно 5 см.



Решение

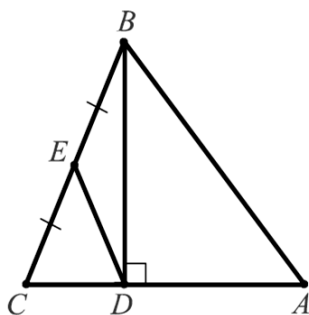
Пусть $AB = 9$ см, $AC = 17$ см, $MN = 5$ см, где M и N – середины хорд. Соединим точки B, C и рассмотрим образовавшийся треугольник ABC . По теореме о средней линии треугольника $BC = 2MN = 10$ см (заметим, что $17^2 > 10^2 + 9^2$, поэтому $\angle B$ – тупой и центр описанной окружности лежит вне треугольника).

Искомый радиус вычислим как радиус описанной окружности треугольника ABC по формуле $\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S}$, где S – его площадь:

$$\frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1}} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 5}{2 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{85}{8} \text{ (см)}.$$

Ответ: 10,625 см.

14.2. Пусть BD – высота треугольника ABC , точка E – середина BC . Вычислить радиус круга, описанного около треугольника BDE , если $AB = 30$, $BC = 26$, $AC = 28$.



Решение

Для нахождения искомого радиуса воспользуемся формулой

$$\frac{BD \cdot DE \cdot BE}{4S_{BDE}}.$$

Из условия задачи вытекает, что DE – медиана прямоугольного треугольника и площадь треугольника BDE – половина площади треугольника CBD , равной полупроизведению его катетов, а BE – половина гипотенузы, т. е. $BE = 13$.

$$4S_{BDE} = 4 \cdot \frac{1}{2} S_{CBD} = 2 \cdot \frac{1}{2} BD \cdot CD = BD \cdot CD.$$

Имеем:

$$\frac{BD \cdot DE \cdot BE}{BD \cdot CD} = \frac{BE^2}{CD}.$$

Обозначив катет CD через x , найдем его как проекцию наклонной BC на прямую AC :

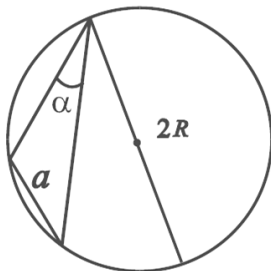
$$AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2.$$

$$30^2 - 26^2 = (28 - x)^2 - x^2, 4 \cdot 56 = (28 - 2x) \cdot 28, 4 = 14 - x,$$

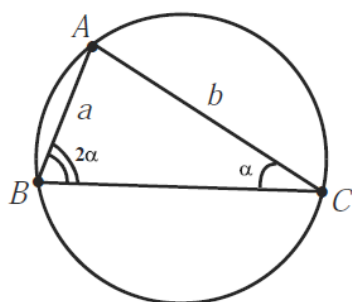
$$x = 10.$$

Итак, радиус описанного круга равен $13^2 : 10 = 16,9$.

Ответ: 16,9.

15		Следствие из теоремы синусов. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего ей угла равно диаметру описанной окружности, т.е. $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \text{ или } a = 2R \sin \alpha.$
----	---	---

15.1. В окружности проведены две хорды $AB = a$ и $AC = b$. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB . Найти радиус окружности.



Решение

Введем обозначение: $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$, т.к. длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB .

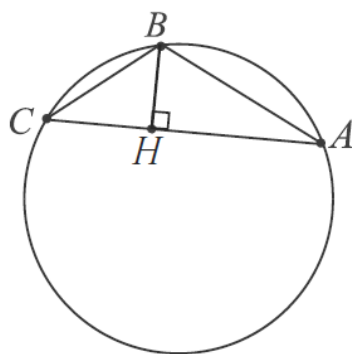
По теореме синусов для $\triangle ABC$: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 2\alpha}$. Отсюда выразим $\cos \alpha$ через a и b : $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{2\sin \alpha \cos \alpha}$ или $\frac{a}{1} = \frac{b}{2 \cos \alpha}$
 $(\sin \alpha \neq 0), \cos \alpha = \frac{b}{2a}$

Найдем $\sin \alpha$. $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{4a^2}}$ ($\sin \alpha > 0$, т. к. синус любого угла треугольника положителен). Остается воспользоваться формулой: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, где R – искомый радиус.

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a \cdot 2a}{2\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Ответ: $\frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$

15.2. В круге радиуса 12 см длина хорды AB равна 6 см, а хорды BC – 4 см. Найти длину хорды AC .



Решение

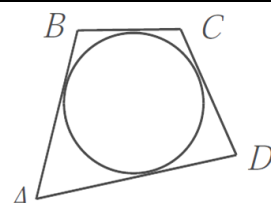
Хорда AC – сторона тупоугольного треугольника ABC ($\angle B > 90^\circ$), вписанного в круг заданного радиуса. По задаче-теореме в этом треугольнике $\sin \angle A = BC : (2 \cdot 12) = 4 : 24 = \frac{1}{6}$

Проведем $BH \perp AC$ и заметим, что в треугольнике ABH $\sin \angle A = BH : AB = \frac{BH}{6}$. Значит, $BH = 1$.

Далее из прямоугольных треугольников CBH и ABH по теореме Пифагора находим: $CH = \sqrt{15}$, $AH = \sqrt{35}$,
 $AC = \sqrt{35} + \sqrt{15}$.

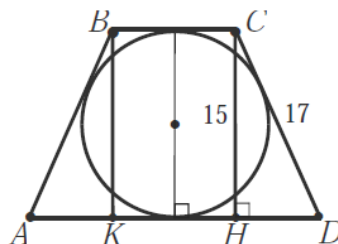
Ответ: $\sqrt{35} + \sqrt{15}$.

IV. Окружность и четырехугольник

16		Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин его противоположных сторон были равны. $AB + CD = BC + AD.$
----	---	--

16.1. Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение



В данной трапеции $ABCD$: $AB = CD = 17$ см, $CH \perp AD$, $CH = 15$ см (диаметр вписанной окружности равен высоте трапеции).

Из $\triangle CDH$: $DH = 8$ см (пифагорова тройка 8, 15, 17).

По задаче-теореме для описанной трапеции:

$$AB + CD = BC + AD.$$

Имеем: $17 + 17 = BC + (8 + BC + 8)$, так как $BC = KH$.

$$17 = 8 + BC, BC = 9 \text{ см.}$$

$$AD = 9 + 2 \cdot 8 = 25 \text{ (см).}$$

Ответ: 9 см, 25 см.

16.2. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна S . Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\pi/6$.

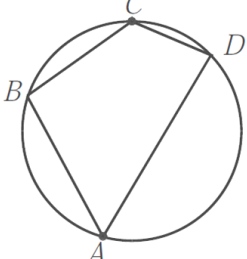
Решение

Пусть в трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $CH \perp AD$, $\angle CDH = \pi/6 = 30^\circ$, $S_{ABCD} = S$ (см. рис. к задаче 16.1). Т. к. трапеция описана, то $BC + AD = 2CD$ или $\frac{1}{2}(BC + AD) = CD$, т.е. боковая сторона CD равна средней линии трапеции. Кроме того, из $\triangle CDH$: $CH = \frac{1}{2} CD$ ($\angle CDH = 30^\circ$).

Таким образом, искомую боковую сторону трапеции можно выразить через заданную площадь, равную произведению средней линии на высоту.

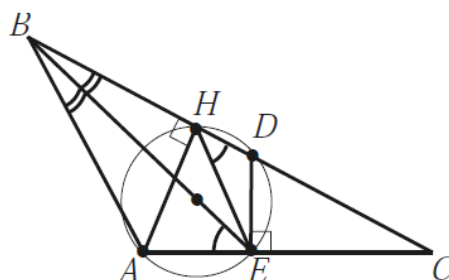
$$\text{Имеем: } CD \cdot \frac{1}{2} CD = S, CD^2 = 2S, CD = \sqrt{2S}.$$

Ответ: $\sqrt{2S}$

17		Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ.$
----	---	--

17.1. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE . Докажите, что если $\angle BEA = 45^\circ$, то и $\angle EHC = 45^\circ$.

Доказательство

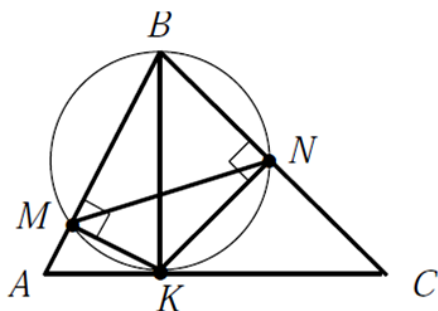


Очевидно, достаточно доказать, что HE – биссектриса прямого угла AHC . Восставим перпендикуляр из точки E к AC . D – точка его пересечения со стороной BC .

$\triangle BEA = \triangle BED$, т.к. у этих прямоугольных треугольников общая сторона BE и равные острые углы, прилежащие к ней. Отсюда $AE = ED$ и $\angle E + \angle H = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ в образовавшемся четырехугольнике $AEDH$.

Значит, существует описанная около него окружность. Отрезки AE и ED – равные хорды этой окружности. Равенство соответствующих им дуг влечет равенство вписанных углов AHE и EHD , т.е. HE – биссектриса прямого угла AHC и $\angle EHC = 45^\circ$, ч.т.д.

17.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC найти такую точку, чтобы расстояние между ее проекциями на две другие стороны было наименьшим.



Решение

Введем обозначения: K – искомая точка, M и N – ее проекции на стороны AB и BC .

В четырехугольнике $BNKM$: $\angle M + \angle N = 180^\circ$.

Значит, около него можно описать окружность с диаметром BK .

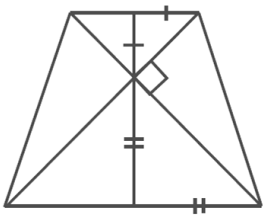
Для описанной окружности треугольника BMN получим:

$MN = BK \sin B$. Множитель $\sin B$ в правой части – постоянная величина, поэтому произведение будет наименьшим при наименьшем значении BK .

Несложно сделать вывод, что в этом случае $BK \perp AC$.

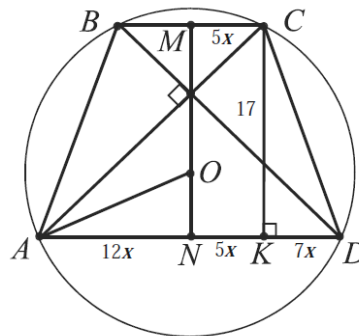
Ответ: основание высоты треугольника, проведенной к AC .

V. Четырехугольник

18		Если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то длина ее высоты равна длине средней линии, а площадь равна квадрату высоты трапеции, т.е. $S = h^2.$
-----------	---	--

18.1. Основания равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а ее высота равна 17. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если известно, что ее средняя линия равна высоте.

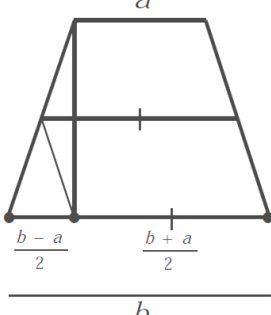
Решение



Пусть $ABCD$ данная трапеция с высотой CK , $BC : AD = 5 : 12$. Обозначим BC через $10x$, AD – $24x$. Тогда $MC = NK = 5x$, $AN = 12x$, $KD = 7x$, где M и N – середины оснований. По условию задачи средняя линия вписанной равнобедренной трапеции равна ее высоте. Отсюда по утверждению, обратному задаче-теореме 18, диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. В прямоугольном треугольнике ACK : $CK = 17$, $AK = 7x$, $\angle CAK = 45^\circ$. Так как $CK = AK$, то $17x = 17$, $x = 1$. Значит, $BC = 10$, $AD = 24$. Из $\triangle CKD$: $\angle CKD = 90^\circ$, $CD = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338}$. Радиус описанной около трапеции окружности найдем как радиус описанной окружности треугольника ADC : $\angle CAD = 45^\circ$,

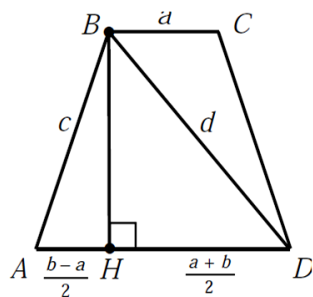
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{CD}{2 \sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{338}}{\sqrt{2}} = \sqrt{169} = 13.$$

Ответ 13

19		Если основания равнобедренной трапеции равны a и b ($a < b$), то ее высота делит основание b на части $\frac{b-a}{2}$ и $\frac{b+a}{2}$. Большая из этих частей равна средней линии трапеции.
----	---	---

19.1. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 см, а площадь равна 48 см². Найти высоту трапеции.

Решение



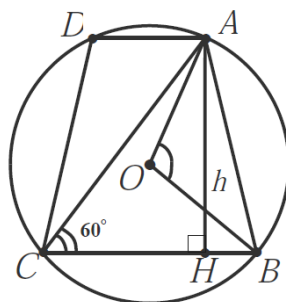
По условию $BD = 10$ см, поэтому $DH^2 + BH^2 = 10^2$ (1). По задаче-теореме отрезок большего основания DH равен средней линии трапеции, поэтому, учитывая второе условие задачи, получим $DH \cdot BH = 48$ или $2DH \cdot BH = 96$ (2).

Почленно складывая равенства (1) и (2), имеем: $(DH + BH)^2 = 196$. Отсюда $DH + BH = 14$ (см). Легко убедиться (пифагорова тройка 6, 8, 10), что $DH = 6$ см, $BH = 8$ см или $DH = 8$ см, $BH = 6$ см.

Ответ: 6 см или 8 см.

19.2. Найти среднюю линию равнобокой трапеции с высотой h , если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120° .

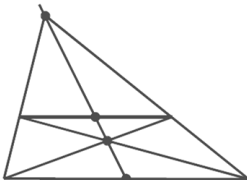
Решение



В трапеции $ABCD$: $AB = CD$, $AH \perp BC$, $AH = h$, $\angle AOB = 120^\circ$, где O – центр описанной окружности. $\angle ACB = 120^\circ : 2 = 60^\circ$ как вписанный.

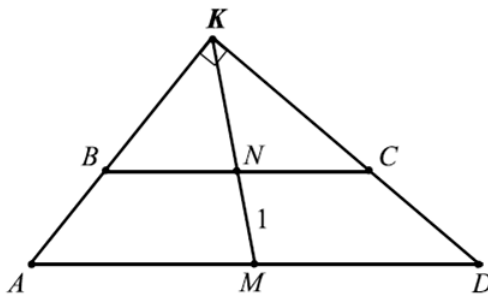
Из $\triangle ACH$: $CH = AH : \sqrt{3} = h : \sqrt{3}$ По задаче-теореме отрезок CH равен средней линии трапеции.

Ответ: $h : \sqrt{3}$

20		Замечательное свойство трапеции. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.
----	---	--

20.1. Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50° . Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины этих оснований, равен 1.

Решение



В трапеции $ABCD$: $\angle D = 40^\circ$, $\angle A = 50^\circ$; N и M – середины оснований BC и AD , $MN = 1$. Продлим боковые стороны трапеции до их пересечения в точке K . По задаче-теореме точки M , N , K лежат на одной прямой. Образовавшиеся треугольники AKD и BKC – прямоугольные, т.к. $\angle K = 180^\circ - 40^\circ - 50^\circ = 90^\circ$. Значит, $AM = MK$, $BN = NK$. Вычитая равенства, находим: $AM - BN = MK - NK = MN = 1$. Итак, $AM - BN = 1$, $AM + BN = 4$, так как длина средней линии трапеции равна 4 по условию. Отсюда $2AM = AD = 5$. Меньшее основание трапеции равно $2 \cdot 4 - 5$, т.е. 3.

Ответ: 3, 5.

20.2. Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности.

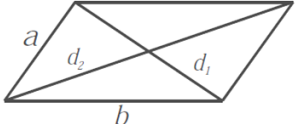
Доказательство

Воспользуемся рисунком к задаче 20.1. Основания трапеции служат гипотенузами прямоугольных треугольников AKD и BKC и удвоенными радиусами описанных окружностей (см. 20.1). Следовательно, $KM = \frac{1}{2} AD$, $KN = \frac{1}{2} BC$.
 $MN = KM - KN = \frac{1}{2} (AD - BC)$, ч.т.д.

Пусть M и N – середины оснований трапеции. Докажите, что если прямая MN образует равные углы с боковыми сторонами трапеции, то эта трапеция равнобокая.

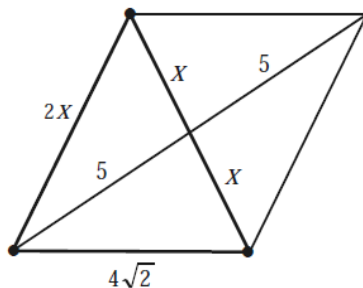
Доказательство

Пусть M и N – середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, $K = AB \cap CD$. По задаче-теореме точки M , N , K принадлежат одной прямой, а по условию $\angle AKM = \angle MKD$. Значит, треугольники ADK и BCK – равнобедренные, т.к. KM и KN соответственно служат их биссектрисами и медианами. Отсюда $AK = DK$ и $BK = CK$. Вычитая, получим $AK - BK = DK - CK$, т.е. $AB = CD$, ч.т.д.

21		Следствие из теоремы косинусов. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т.е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$
----	---	---

21.1. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти длины боковых сторон.

Решение



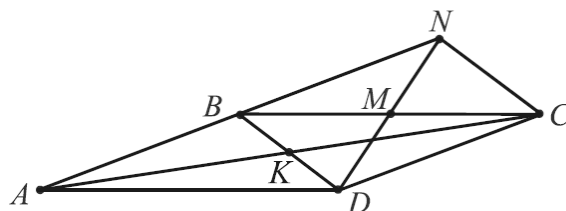
Достроив заданный треугольник до параллелограмма и обозначив через x половину боковой стороны треугольника, получим по задаче-теореме:

$$(2x)^2 + 10^2 = 2((4\sqrt{2})^2 + (2x)^2) \text{ или } 2x^2 + 50 = 3^2 + 4x^2, x^2 = 9, x = 3 \text{ см } (x > 0), 2x = 6 \text{ см.}$$

Ответ: 6 см.

21.2. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ втрое больше диагонали BD и пересекается с ней под углом в 60° . Найдите отрезок, соединяющий вершину D с серединой стороны BC , если $AC = 24$, а угол BDC – тупой.

Решение



По свойству параллелограмма: $AK = KC = 12$, $BK = KD = 4$.

Пусть $BM = MC$. Продлим DM и построим параллелограмм $DBNC$, диагональ DN которого равна удвоенному искомому отрезку.

Сначала вычислим квадраты отрезков BC и CD , применяя теорему косинусов в треугольниках CKB и CKD ($\angle CKD = 60^\circ$, поэтому смежный с ним угол CKB равен 120°).

$$BC^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot (-\frac{1}{2}) = 144 + 16 + 48 = 208.$$

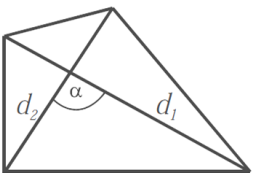
$$CD^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 144 + 16 - 48 = 112.$$

По задаче-теореме для параллелограмма $DBNC$ запишем: $DN^2 = 2(CD^2 + BD^2) - BC^2$.

$$\text{Имеем: } DN^2 = 2(64 + 112) - 208 = 4(32 + 56 - 52) = 4 \cdot 36 = (2 \cdot 6)^2 = 144.$$

Итак, $DN = 12$, а $DM = 12 : 2 = 6$.

Ответ: 6.

22		Площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей, умноженному на синус угла между ними. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$. Следствие: площадь четырехугольника, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, равна половине произведения диагоналей. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.
----	---	--

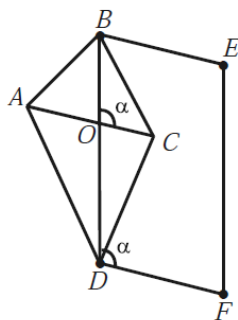
22.1. Доказать, что из всех прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, наибольшую площадь имеет квадрат.

Решение

Обратим внимание на то, что равные диагонали прямоугольников, вписанных в одну и ту же окружность, равны диаметру d этой окружности и являются постоянными величинами для фиксированной окружности. Если α – угол между диагоналями прямоугольника, то его площадь равна $\frac{1}{2} d \cdot d \cdot \sin \alpha$. Это произведение принимает наибольшее значение при $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда прямоугольник является квадратом, ч.т.д.

22.2. Площадь четырехугольника равна S . Найти площадь параллелограмма, стороны которого равны и параллельны диагоналям четырехугольника.

Решение



Построим указанный параллелограмм на диагонали BD четырехугольника $ABCD$: $BE \parallel AC$, $BE = AC$, $\angle BOC = \angle BDF = \alpha$. Имеем: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

Отсюда $AC \cdot BD \sin \alpha = 2S$.

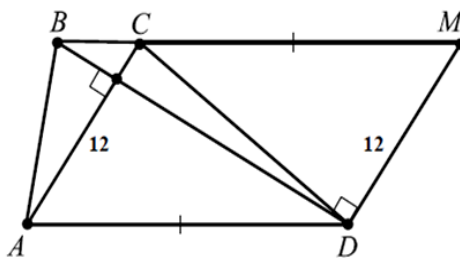
Площадь параллелограмма:

$DF \cdot BD \sin \alpha = AC \cdot BD \sin \alpha = 2S$, так как $DF = AC$.

Ответ: $2S$.

22.3. Диагонали трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. $AC = 12$ см. Найти площадь трапеции, зная, что длина ее средней линии равна 10 см.

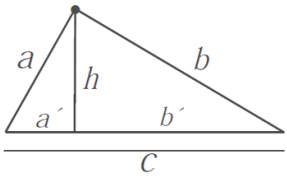
Решение



Проведем $DM \parallel AC$. Тогда в образовавшемся параллелограмме $ACMD$: $CM = AD$, $DM = 12$ см. $BM = BC + CM = BC + AD = 2 \frac{BC+AD}{2} = 20$ см (средняя линия трапеции равна 10 см по условию). Вторую диагональ трапеции найдем из прямоугольного треугольника BDM ($\angle BDM = 90^\circ$, т.к. $DM \parallel AC$). $BD = 16$ см (пифагорова тройка 12, 16, 20). Воспользовавшись следствием из задачи-теоремы, вычислим площадь трапеции: $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 6 \cdot 16 = 96$ (см²).

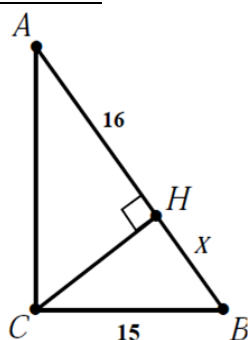
Ответ. 96 см².

VI. Средние пропорциональные отрезки

23		Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных исходному. Если в этих треугольниках взять соответствующие линейные элементы x, y, z, то $x^2 + y^2 = z^2$. Пусть a и b – катеты, h – высота, проведенная к гипотенузе с прямоугольного треугольника, a' и b' – проекции катетов на гипотенузу. Тогда $a^2 = a' \cdot c$; $b^2 = b' \cdot c$; $h^2 = a' \cdot b'$. Следствие: $h = \frac{ab}{c}$.
----	---	---

23.1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение

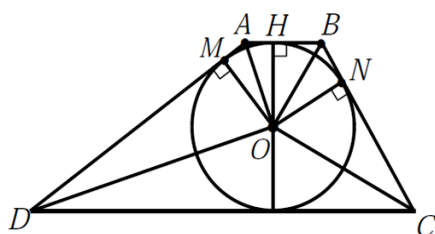


В $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$, BC и AC – катеты, $BC = 15$ см, $CH \perp AB$, $AH = 16$ см. Пусть $BH = x$ см, $AB = (x + 16)$ см.
 Так как $BC^2 = BH \cdot AB$, то $15^2 = x(x + 16)$ или $x^2 + 16x - 225 = 0$, $x = 9$ см ($x > 0$).
 Значит, $AB = 9 + 16 = 25$ (см), $AC = 20$ см.
 Зная стороны, вычислим искомый радиус:
 $\frac{1}{2} \cdot (15 + 20 - 25) = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

23.2. Центр O вписанной в трапецию $ABCD$ окружности удален от концов ее меньшего основания AB , равного 70, на 65 и 75. Вычислить площадь трапеции.

Решение



В $\triangle OAB$ известны все стороны. Вычислим его высоту OH , равную $2S/AB$, уменьшив заданные длины в 5 раз, считая стороны равными 13, 14 и 15.
 Тогда $\frac{OH}{5} = \frac{2\sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8}}{4} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8} = 12$.
 Итак, $OH = OM = ON = 60$ – радиусы вписанной окружности ($OM \perp AD$, $ON \perp BC$).

Площадь трапеции вычислим как произведение суммы оснований на половину высоты, т.е. по формуле: $OH (AB + CD)$.

Из $\triangle OAH$: $AH/5 = 5$ (пифагорова тройка 5, 12, 13).

Из $\triangle OBH$: $BH/5 = 9$ (пифагорова тройка 9, 12, 15).

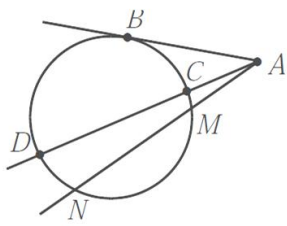
Значит, $AM = AH = 25$, $BN = BH = 45$ (равные отрезки касательных, проведенные к окружности из точек A и B).

В прямоугольных треугольниках AOD и BOC вычислим проекции катетов OD и OC на их гипотенузы: $\frac{MD}{5} = \frac{12^2}{5}$, $\frac{NC}{5} = \frac{12^2}{9}$ = 16, т.е. $MD = 144$, $NC = 80$.

$DC = MD + NC = 144 + 80 = 224$.

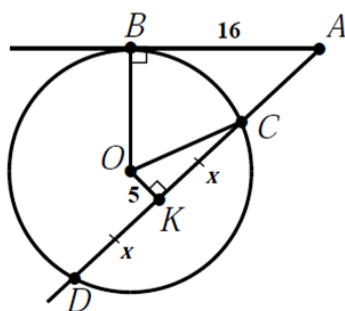
Таким образом, $OH \cdot (AB + DC) = 60 \cdot (70 + 224) = 17640$.

Ответ: 17640.

24		Из точки A, взятой вне окружности, проведены к ней касательная AB и две секущие, пересекающие окружность в точках C и D, M и N соответственно. Тогда $AB^2 = AC \cdot AD$. Следствие: $AC \cdot AD = AM \cdot AN$.
----	---	---

24.1. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью 32 см. Найти радиус окружности, если секущая удалена от ее центра на 5 см.

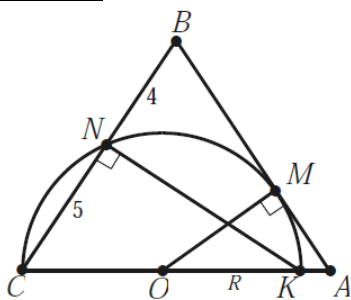
Решение



Пусть O – центр, AB – касательная, AD – секущая. $AB = 16$ см, $AD = 32$ см.
 Проведем $OK \perp CD$ и радиус OC. $OK = 5$ см.
 Обозначим KC через x, тогда $CD = 2x$ см (задача-теорема 1).
 По задаче-теореме: $AB^2 = AC \cdot AD$ или
 $16^2 = 32(32 - 2x)$,
 $8 = 32 - 2x$,
 $4 = 16 - x$,
 $x = 12$ см.
 Из прямоугольного треугольника OCK
 $OC = 13$ см (пифагорова тройка 5, 12, 13).
Ответ: 13 см.

24.2. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найти радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.

Решение

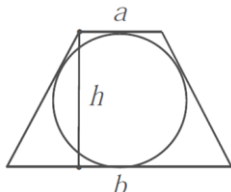


На рисунке O – центр, OM – радиус, CK – диаметр полуокружности, $K \in AC$, $M \in AB$.
 $N = \text{Окр}(O, OM) \cap BC$. В $\triangle ABC$: $AB = AC = 4 + 5 = 9$ (см).
 По задаче-теореме $BM^2 = BN \cdot BC$ или $BM^2 = 4 \cdot 9 = 36$ (см).
 Отсюда $BM = 6$ см, $AM = 3$ см. Пусть $OK = OM = OC = R$. Воспользуемся подобием треугольников AOM и CKN ($\angle A = \angle C$):

$$\frac{AM}{OA} = \frac{CN}{CK}, \quad \frac{3}{OA} = \frac{5}{2R}, \quad OA = \frac{6}{5}R.$$

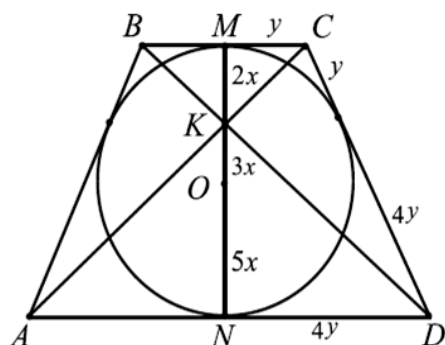
Из $\triangle AOM$ по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} \frac{36R^2}{25} - R^2 &= 3^2, \quad \frac{11R^2}{5^2} = 3^2, \quad \sqrt{11} \cdot R = \\ &= 15, \quad R = \frac{15}{\sqrt{11}} \text{ см.} \quad \text{Ответ: } \frac{15}{\sqrt{11}} \text{ см.} \end{aligned}$$

25		Высота описанной равнобокой трапеции есть среднее пропорциональное ее оснований, т.е. $h = \sqrt{a \cdot b} \text{ или } h^2 = ab.$
----	---	---

25.1. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу, как 3 : 5. Найдите отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

Решение



Пусть $AB = CD$, $K = AC \cap BD$, O – центр вписанной окружности, M и N – середины оснований, $OK : ON = 3 : 5$.

Тогда $MK = 5x - 3x = 2x$, $NK = 8x$ ($x > 0$).

$\triangle KMC \sim \triangle KNA$, поэтому

$MC : AN = MK : NK = 1 : 4$.

Если $MC = y$, $AN = ND = 4y$, то $CD = 5y$, а периметр описанной равнобедренной трапеции равен $4CD$ или $20y$ ($y > 0$).

По задаче-теореме $MN^2 = AD \cdot BC$, т.е.

$$(10x)^2 = 2y \cdot 8y = (4y)^2.$$

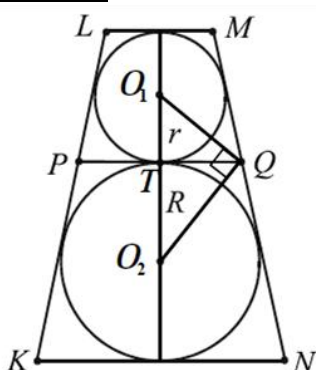
Отсюда $10x = 4y$ и

искмое отношение равно $\frac{20y}{\pi \cdot 4y} = \frac{5}{\pi}$

Ответ: $5 : \pi$.

25.2. На боковых сторонах KL и MN равнобокой трапеции $KLMN$ выбраны соответственно точки P и Q так, что отрезок PQ параллелен основаниям трапеции. Известно, что в каждую из трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ можно вписать окружность, и радиусы этих окружностей равны R и r соответственно. Определить основания LM и KN .

Решение



Соединим центры окружностей, точки O_1 и O_2 с точкой Q . QO_1, QO_2 – биссектрисы смежных углов MQP, NQP , поэтому $\angle O_1QO_2 = 90^\circ$ и $QT^2 = O_1T \cdot O_2T$ ($T = O_1O_2 \cap PQ$), $QT = rR$, $PQ = 2rR$. Итак, общее основание PQ равнобедренных трапеций $KPQN$ и $PLMQ$ равно $2rR$, а диаметры вписанных в них окружностей, высоты указанных трапеций, равны $2r$ и $2R$. По задаче-теореме:

$$LM = \frac{4r^2}{2\sqrt{rR}} = 2r\sqrt{\frac{r}{R}}, \quad KN = \frac{4R^2}{2\sqrt{rR}} = 2R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

$$\text{Ответ: } 2r\sqrt{\frac{r}{R}}, \quad 2R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

К десяти задачам для самостоятельного решения приведено указание номеров задач-теорем или методов, которые могут применяться в решении

№ 1. Дан треугольник ABC , в котором угол B равен 30° , $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D . Найти площадь треугольника ABD .

№ 2. Окружность с центром в точке O проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает сторону AC в точке M и сторону BC в точке N . Углы AOM и BON равны 60° . Расстояние от точки N до прямой AB равно $5\sqrt{3}$. Длина отрезка MN в четыре раза меньше длины отрезка AB . Найти площадь треугольника ABC .

№ 3. На сторону BC ромба $ABCD$ опущена высота DK . Диагональ AC пересекает ее в точке M . Найдите DK , если известно, что $AK = 17$ и $DM : MK = 13 : 7$.

№ 4. Касательная, проведенная через вершину M вписанного в окружность треугольника KLM , пересекает продолжение стороны KL за вершину L в точке N . Известно, что радиус окружности равен 2, $KM = \sqrt{8}$, $\angle MNK + \angle KML = 4 \angle LKM$. Найдите касательную MN .

№ 5. В треугольнике ABC угол C равен 120° , а биссектриса угла C равна 3. Известно, что $AC : CB = 3 : 2$. Найдите тангенс угла A и сторону BC .

№ 6. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $CK = 5$, $KH = 1$.

№ 7. В окружность радиуса 5 вписан четырехугольник $ABCD$, у которого угол D прямой, $AB : BC = 3 : 4$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$, если его площадь равна 44.

№ 8. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку B , параллельна AC . Найдите площадь треугольника BCE , если известно, что $EA : DA = 3 : 4$ и $S_{DCB} = 16$.

№ 9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке K . Известно, что $AD = 5$, $BC = 10$, $BK = 6$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

№ 10. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на высоте BD как на диаметре построена окружность. Через точки A и C к окружности проведены касательные AM и CN , продолжения которых пересекаются в точке O . Найдите отношение $AB : AC$, если $OM : AC = k$ и высота BD меньше основания AC .

Указания к решению задач.

- | | | | | |
|--------------------|---------------|-------------|---------------------------|-----------------------|
| 1. 9. | 2. 4, 10, 19. | 3. 9. | 4. 5,
теорема синусов. | 5.
Метод площадей. |
| 6. 10,
подобие. | 7. 4, 17. | 8. 4, 5, 9. | 9. 3, 22. | 10. 9, 14, 24. |

Литература

1. Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями): Уч. пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1986.
2. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения /Э.Г. Готман. – М.: Просвещение, 1996.
3. Мазур К.И. Решебник основных конкурсных задач по математике из сборника под ред. М.И. Сканави – К., 1998.
4. Математические олимпиады школьников: книга для учащихся общеобразовательных учреждений/ Н.Х. Агаханов, Л.П.Купцов, Ю.В.Нестеренко и др. – М.: Просвещение, 1997
5. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. –Изд. 4-е, допол. – М.: МЦНМО, 2001
6. Сборник задач по геометрии. 5000 задач с ответами / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордон. – М.: ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2001.
7. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Уч. пособие / Под ред. М.И. Сканави. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1980
8. Факультативный курс по математике: Решение задач. Учеб. Пособие для 10-11 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1991.
9. Факультативный курс по математике: Учеб. пособие для 7-9 кл. сред. шк. / Сост. И.Л. Никольская. – М.: Просвещение, 1991.
10. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике. – М.: Экзамен, 2006
11. Фарков А.В. Математические олимпиады. М.: Владос, 2004
12. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. (Планиметрия). – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1986. (Б-чка "Квант". Вып. 17).
13. Шарыгин И.Ф. Учимся решать задачи по геометрии // Математика в школе. – 1989, №2. – С. 87-101; №3. – С. 95-103.